

---

**ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของการประมาณการแจกแจงทวินามนิเสธด้วยการแจกแจงปัวซอง**  
**The Relative Error of Poisson Approximation to the Negative Binomial Distribution**

คณินทร์ อีรภาพโอฟาร\*, พัทธี วงษ์เกษม และเสาวรส ศรีสุข

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา บางแสน ชลบุรี 20131

Kanint Teerapabolarn, Patcharee Wongkasem and Saowaros Srisook

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, Chonburi 20131, Thailand

---

### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ใช้ฟังก์ชัน  $w$  ( $w$ -function) ร่วมกับเอกลักษณ์สไตน์เชน (Stein-Chen identity) ในการหาขอบเขตบน (upper bound) ของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์สำหรับการประมาณการแจกแจงทวินามนิเสธ (ที่มีพารามิเตอร์  $n$  และ  $p$ ) ด้วยการแจกแจงปัวซอง (ที่มีค่าเฉลี่ย  $\lambda = \frac{n(1-p)}{p}$ ) โดยอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมนอกจากนี้เรายังสามารถหาขอบเขต (bound) ของอัตราส่วนระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธ และตัวแปรสุ่มปัวซอง ขอบเขตทั้งสองแบบข้างต้นได้ชี้ให้เห็นว่าแต่ละผลลัพธ์จะให้ผลการประมาณปัวซองที่ดี เมื่อ  $q = 1-p$  หรือ  $\lambda$  มีค่าน้อย ในตอนท้ายของงานวิจัยเราได้ยกตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ที่ได้มาทั้งหมด

**คำสำคัญ :** การประมาณปัวซอง; การแจกแจงทวินามนิเสธ; เอกลักษณ์สไตน์เชน; ฟังก์ชัน  $w$

### Abstract

This paper uses the  $w$ -function and the Stein-Chen identity to determine an upper bound of the relative error for approximating the negative binomial distribution with parameters  $n$  and  $p$  by the Poisson distribution with mean  $\lambda = \frac{n(1-p)}{p}$  in the form of a cumulative distribution function. Furthermore, we also give a bound of the ratio between the negative binomial and Poisson cumulative distribution functions. For these upper bounds, it is pointed out that each result yields a good Poisson approximation if  $q = 1-p$  or  $\lambda$  is small. Finally, we give some numerical examples to illustrate applications of all results obtained.

**Key Words :** Poisson approximation; negative binomial distribution; Stein-Chen identity;  $w$ -function

---

\*Corresponding author. E-mail: kanint@buu.ac.th

การแจกแจงทวินามนิเสธ (negative binomial distribution) ที่มีพารามิเตอร์  $n$  และความน่าจะเป็น  $p$  สามารถพิจารณาในรูปของการแจกแจงของจำนวนความล้มเหลว (failure) ก่อนความสำเร็จ (success) ครั้งที่  $n$  ในลำดับของการทดลองย่อยแบร์นูลลี (Bernoulli trials) ที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ความสำเร็จและความล้มเหลวที่เกิดขึ้นในแต่ละการทดลองย่อยมีความน่าจะเป็นเท่ากับ  $p$  และ  $q = 1-p$  ตามลำดับ ในกรณีนี้  $n = 1$  เราจะเรียกการแจกแจงทวินามนิเสธว่า การแจกแจงเรขาคณิต (geometric distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงของจำนวนความล้มเหลวก่อนความสำเร็จครั้งแรก

การแจกแจงทวินามนิเสธสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในหลายๆ ด้าน ได้แก่ การวิเคราะห์ที่ช่วยงาน การโทรคมนาคม การวิเคราะห์สินค้าคงคลัง และทางด้านพันธุศาสตร์ของประชากร (สำหรับการประยุกต์ในด้านอื่นๆ สามารถหาได้ใน Johnson *et al.* (2005) นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์อีกมากที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงเรขาคณิต และก่อนที่จะระดมการแจกแจงทวินามนิเสธด้วยการแจกแจงปัวซงเราจะให้นิยามของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธไว้ดังนี้

**นิยาม 1.1** ให้  $X$  เป็นจำนวนความล้มเหลวก่อนความสำเร็จครั้งที่  $n$  ในลำดับของการทดลองย่อยแบร์นูลลีที่เป็นอิสระต่อกันด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จ  $p$  ( $0 < p < 1$ ) แล้วการแจกแจงความน่าจะเป็นของ  $X$  สามารถเขียนได้เป็น

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, \dots$$

การแจกแจงนี้เรียกว่า “การแจกแจงทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์  $n$  และ  $p$ ” (Johnson *et al.*, 2005)

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า ในกรณีนี้  $q$  มีค่าน้อย (มีค่าเข้าใกล้ 0) หรือ  $p$  มีค่ามาก (มีค่าเข้าใกล้ 1) การแจกแจงของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีค่าเฉลี่ยเป็น  $\lambda = \frac{np}{p}$  (ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธ) ซึ่งทำให้ฟังก์ชันการแจกแจง สะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธ

$$\text{เขียนแทนด้วย } NB(k; n, p) = \sum_{j=0}^k \binom{n+j-1}{j} q^j p^n \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, \dots$$

สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ

$$\text{ตัวแปรสุ่มปัวซง เขียนแทนด้วย } P(k; \lambda) = \sum_{j=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \quad \text{เมื่อ}$$

$k = 0, 1, \dots$  และเกณฑ์ที่ใช้วัดความถูกต้องของการประมาณการแจกแจงทวินามนิเสธด้วยการแจกแจงปัวซงในงานวิจัยนี้ คือขอบเขตบนของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และขอบเขตของอัตราส่วนระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของทั้งสองตัวแปรสุ่มดังกล่าว ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และอัตราส่วนระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและ

$$\text{ตัวแปรสุ่มปัวซงที่ } x_0 \text{ เราจะเขียนแทนด้วย } \left| 1 - \frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \right|$$

และ  $\frac{NB(x_0; n, p)}{P(x_0; \lambda)}$  ตามลำดับ

### วิธีดำเนินการวิจัย

ศึกษาแนวความคิดของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และอัตราส่วนของการประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปัวซงจากงานวิจัยของ Teerapabolarn (2007) และศึกษาคูสมบัติของฟังก์ชัน  $w$  ที่จะนำมาใช้ร่วมกับเอกลักษณ์สไตน์เซนจากงานวิจัยของ Majsnerowska (1998) และ Cacoullos and Papathanasion (1989) ซึ่งจากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวข้างต้นเราควรเริ่มต้นด้วยการสร้างบทตั้ง (lemma) เพื่อช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก (main theorem) ของงานวิจัยได้ดังนี้

พิจารณาเอกลักษณ์สไตน์เซนหรือเอกลักษณ์ของสไตน์ (Stein identity) (Stein, 1986) สำหรับการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์  $\lambda$  ซึ่ง (กำหนดฟังก์ชัน  $h$ ) นิยามโดย

$$\lambda f(x+1) - xf(x) = h(x) - P_\lambda(h) \quad (2.1)$$

$$\text{โดยที่ } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, P_\lambda(h) = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \text{ และ } f \text{ และ } h$$

เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตที่นิยามบนเซต  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  ให้

$h_{x_0} : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases}$$

โดยที่  $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ดังนั้นเราจะได้ผลเฉลย  $f$  เมื่อแทน  $h$  ด้วย  $h_{x_0}$  ในสมการ (2.1) (Barbour *et al.*, 1992) ดังสมการต่อไปนี้

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)! \lambda^{-x} e^\lambda [P_\lambda(h_{x_0}) P_\lambda(1-h_{x-1})], & x_0 < x \\ (x-1)! \lambda^{-x} e^\lambda [P_\lambda(h_{x-1}) P_\lambda(1-h_{x_0})], & x_0 \geq x \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

**บทตั้ง 2.1** ให้  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ ,  $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  และ  $k \in \mathbb{N}$  แล้วจะได้ว่า

$$\sup_{x \geq k} |\Delta f(x)| \leq \lambda^{-1} (e^\lambda - 1) P(x_0; \lambda) \min \left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{x_0 + 1} \right\} \quad (2.3)$$

**พิสูจน์** ดูพิสูจน์ได้จากบทตั้ง 2.1 ของ Teerapabolarn (2007) ร่วมกับบทตั้ง 2.2 ของ Teerapabolarn and Wongkasem (2007) #

**บทตั้ง 2.2** ให้  $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  และ  $\lambda = \frac{nq}{p}$  แล้วเราจะได้ว่า

$$\frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \leq \frac{e^{-\lambda}}{p^{n + \min\{x_0, \lceil \lambda \rceil + 1\}}} \quad (2.4)$$

โดยที่  $\lceil \lambda \rceil$  เป็นจำนวนเต็มทีน้อยที่สุดที่ไม่น้อยกว่า  $\lambda$

**พิสูจน์** เราเห็นได้ชัดในกรณี  $x_0 = 0$  จึงเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่าสมการ (2.4) เป็นจริงในกรณี  $x_0 \geq 1$  เราจะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{x_0} \binom{n+k-1}{k} q^k &= 1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{(n+k-1)! q^k}{k!(n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{(n+k-1) \cdots n q^k}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{[np^{-1}q]^k p^k}{k!} \\ &\quad \times \left\{ \frac{(n+k-1) \cdots n}{n} \right\} \\ &\geq 1 + \sum_{k=1}^{x_0} \frac{\lambda^k p^{x_0}}{k!} \\ &\geq p^{x_0} \sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned} \quad (2.5)$$

และในกรณีที่  $x_0 \geq \lceil \lambda \rceil + 1$  เราจะได้ว่า

$$x_0 - 1 \geq \lceil \lambda \rceil \geq \lambda = np^{-1}(1-p) = np^{-1} - n \quad \text{ซึ่งทำให้}$$

$$\frac{n + x_0 - 1}{n} \geq p^{-1} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{x_0} \binom{n+k-1}{k} q^k \\ &= 1 + \lambda p \frac{n+1-1}{n} + \cdots + \frac{\lambda^{(\lceil \lambda \rceil + 1)} p^{(\lceil \lambda \rceil + 1)}}{(\lceil \lambda \rceil + 1)!} \\ &\quad \times \left\{ \frac{n + (\lceil \lambda \rceil + 1) - 1}{n} \cdots \frac{n+1-1}{n} \right\} + \cdots + \frac{\lambda^{x_0} p^{x_0}}{x_0!} \\ &\quad \times \left\{ \frac{n + x_0 - 1}{n} \cdots \frac{n + (\lceil \lambda \rceil + 1) - 1}{n} \cdots \frac{n+1-1}{n} \right\} \\ &\geq p^{\lceil \lambda \rceil + 1} + \lambda p^{\lceil \lambda \rceil + 1} \frac{n+1-1}{n} + \cdots + \frac{\lambda^{\lceil \lambda \rceil + 1} p^{\lceil \lambda \rceil + 1}}{(\lceil \lambda \rceil + 1)!} \\ &\quad \times \left\{ \frac{n + (\lceil \lambda \rceil + 1) - 1}{n} \cdots \frac{n+1-1}{n} \right\} + \cdots + \frac{\lambda^{x_0} p^{\lceil \lambda \rceil + 1}}{x_0!} \\ &\quad \times \left\{ \frac{n + (\lceil \lambda \rceil + 1) - 1}{n} \cdots \frac{n+1-1}{n} \right\} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{x_0} \binom{n+k-1}{k} q^k \\ &\geq p^{\lceil \lambda \rceil + 1} \left\{ 1 + \lambda + \cdots + \frac{\lambda^{\lceil \lambda \rceil + 1}}{(\lceil \lambda \rceil + 1)!} + \cdots + \frac{\lambda^{x_0}}{x_0!} \right\} \\ &\geq p^{\lceil \lambda \rceil + 1} \sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned} \quad (2.6)$$

เพราะว่า 
$$\frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} = \frac{e^{-\lambda}}{p^n} \frac{\sum_{k=0}^{x_0} \frac{\lambda^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{x_0} \binom{n+k-1}{k} q^k}$$

ดังนั้นโดยใช้อสมการ (2.5) และ (2.6) เราจะได้ว่า

$$\frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \leq \frac{e^{-\lambda}}{p^n p^{x_0}}$$

(2.5) และ

$$\frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \leq \frac{e^{-\lambda}}{p^n p^{\lceil \lambda \rceil + 1}}$$

เมื่อ  $x_0 \geq \lceil \lambda \rceil + 1$  ซึ่งทำให้เราได้อสมการ (2.4) #

เมื่อเราพิจารณาแนวคิดของการประมาณปัวซองโดยใช้ฟังก์ชัน  $w$  จากงานวิจัยของ Majsnerowska (1998) เราพบว่า Majsnerowska (1998) ได้ปรับและประยุกต์รูปแบบความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน  $w$  ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ (non-negative integer-valued random variable)  $X$  ที่ปรากฏในงานวิจัยของ Cacoullos and Papathanasiou (1989) ให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) ดังนี้

$$w(k+1) = \frac{p(k)}{p(k+1)} w(k) - \frac{\mu - (k+1)}{\sigma^2} \geq 0 \text{ เมื่อ } k = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

โดยที่  $w(0) = \frac{\mu}{\sigma^2}$   $\mu$  และ  $\sigma^2$  แทนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม  $X$

บทตั้งต่อไปนี้เป็นผลที่ได้มาจากการประยุกต์ใช้สมการเวียนเกิด (2.7)

**บทตั้ง 2.3** ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นเหมือนในนิยาม 1.1 และ  $w(X)$  เป็นฟังก์ชัน  $w$  ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม  $X$  แล้ว

$$w(k) = \frac{(n+k)q}{\sigma^2 p} \text{ เมื่อ } k = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

โดยที่  $\sigma^2 = \frac{nq}{p^2}$

**พิสูจน์** แทน  $\mu = \frac{nq}{p}$  ใน (2.7) และจัดรูปแบบความสัมพันธ์เวียนเกิดใหม่เราจะได้

$$w(k) = \frac{nq}{\sigma^2 p} + w(k-1) \frac{p(k-1)}{p(k)} - \frac{k}{\sigma^2} \text{ เมื่อ } k = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

โดยที่  $w(0) = \frac{nq}{\sigma^2 p}$

เราจะแสดงว่า (2.8) เป็นจริงสำหรับทุก  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  จากสมการ (2.9) เราจะได้

$$w(1) = \frac{nq}{\sigma^2 p} + w(0) \frac{p(0)}{p(1)} - \frac{1}{\sigma^2} = \frac{nq}{\sigma^2 p} + \frac{nq}{\sigma^2 p} \frac{1}{nq} - \frac{1}{\sigma^2} = \frac{(n+1)q}{\sigma^2 p}$$

สมมติว่า  $w(i) = \frac{(n+i)q}{\sigma^2 p}$  ต่อไปเราจะแสดงว่า

$$w(i+1) = \frac{[n+(i+1)]q}{\sigma^2 p} \text{ จาก (2.9) เราจะได้}$$

$$w(i+1) = \frac{nq}{\sigma^2 p} + w(i) \frac{p(i)}{p(i+1)} - \frac{i+1}{\sigma^2} = \frac{nq}{\sigma^2 p} + \frac{(n+i)q}{\sigma^2 p} \frac{i+1}{(n+i)q} - \frac{i+1}{\sigma^2} = \frac{[n+(i+1)]q}{\sigma^2 p}$$

ดังนั้นโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction) เราจะได้ (2.8) เป็นจริงสำหรับทุก  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  #

## ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่เราต้องการจากงานวิจัยนี้คือ ขอบเขตบนของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และขอบเขตของอัตราส่วนระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซอง ผลการวิจัยดังกล่าวสามารถทำได้โดยการใช้คุณสมบัติเฉพาะของฟังก์ชัน  $w$  ร่วมกับเอกลักษณ์สไตน์เซน (2.1) คุณสมบัติเฉพาะของ ฟังก์ชัน  $w$  ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม  $X$  ได้กล่าวไว้ใน Cacoullos and Papathanasiou (1989) ดังนี้

“ถ้าฟังก์ชัน  $g$  สอดคล้องกับเงื่อนไข  $E|w(X)\Delta g(X)| < \infty$  และ  $E|(X-\mu)g(X)| < \infty$  แล้วจะได้ว่า  $\text{Cov}(X, g(X)) = \sigma^2 E[w(X)\Delta g(X)]$ ” เมื่อ  $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจง (ผลการวิจัย) ที่อยู่ในรูปแบบของขอบเขตบนของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และขอบเขตของอัตราส่วนระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธและตัวแปรสุ่มปัวซอง

**ทฤษฎีบท 3.1** ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นเหมือนในนิยาม 1.1  $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  และ  $\mu = \lambda = \frac{nq}{p} < \infty$  แล้วสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\left| 1 - \frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \right| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{p^{n + \min\{x_0, \lceil \lambda \rceil + 1\}}} \times \min \left\{ \frac{(1 - p^n)}{n}, \frac{q}{p(x_0 + 1)} \right\} \quad (3.1)$$

**พิสูจน์** เราจะแสดงว่าสมการ (3.1) เป็นจริง จากสมการ (2.1) เมื่อกำหนด  $h = h_{x_0}$  เราจะได้

$$P(X \leq x_0) - P(x_0; \lambda) = E[\lambda f(X+1) - Xf(X)]$$

หรือ

$$|NB(x_0; n, p) - P(x_0; \lambda)| = |E[\lambda f(X+1) - Xf(X)]| \quad (3.2)$$

โดยที่  $f$  นิยามเช่นเดียวกับสมการ (2.2) จากสมการ (3.2) เราจะได้

$$\begin{aligned} & |NB(x_0; n, p) - P(x_0; \lambda)| \\ &= |\lambda E[f(X+1)] - E[Xf(X)]| \\ &= |\lambda E[f(X+1)] - \text{Cov}(X, f(X)) - \mu E[f(X)]| \\ &= |E[\lambda f(X+1) - \mu f(X)] - \text{Cov}(X, f(X))| \\ &= |\lambda E[\Delta f(X)] - \text{Cov}(X, f(X))| \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $E|w(X)\Delta f(X)| < \infty$  และ  $\sup_{x \geq 1} f(x) \leq \min\{1, \lambda^{-1/2}\}$

(Barbour et al., 1992) ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} & |NB(x_0; n, p) - P(x_0; \lambda)| \\ &= |\lambda E[\Delta f(X)] - \sigma^2 E[w(X)\Delta f(X)]| \\ &= \left| E \left\{ \left[ \lambda - \sigma^2 w(X) \right] \Delta f(X) \right\} \right| \\ &\leq E \left| \left[ \lambda - \sigma^2 w(X) \right] \Delta f(X) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \left[ \lambda - \sigma^2 w(k) \right] \Delta f(k) \right| p(k) \quad (\text{โดยบทตั้ง 2.3}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \left[ \frac{nq}{p} - \frac{(n+k)q}{p} \right] \Delta f(k) \right| p(k) \\ &= \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} k |\Delta f(k)| p(k) \\ &\leq \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} k \sup_{x \geq k} |\Delta f(x)| p(k) \\ &\leq \lambda^{-1} (e^\lambda - 1) P(x_0; \lambda) \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) \\ &\times \min \left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{x_0 + 1} \right\} \quad (\text{โดยบทตั้ง 2.1}) \quad (3.3) \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} & \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) \min \left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{x_0 + 1} \right\} \\ &= \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \min \left\{ p(k), \frac{kp(k)}{x_0 + 1} \right\} \\ &\leq \frac{q}{p} \min \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} p(k), \frac{1}{x_0 + 1} \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) \right\} \\ &= \frac{q}{p} \min \left\{ 1 - p(0), \frac{\mu}{x_0 + 1} \right\} \\ &= \frac{q}{p} \min \left\{ 1 - p^n, \frac{\lambda}{x_0 + 1} \right\} \quad (3.4) \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยการแทนสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.3) เราจะได้

$$\begin{aligned} & |NB(x_0; n, p) - P(x_0; \lambda)| \\ &\leq \lambda^{-1} (e^\lambda - 1) P(x_0; \lambda) \frac{q}{p} \min \left\{ 1 - p^n, \frac{\lambda}{x_0 + 1} \right\} \\ &= (e^\lambda - 1) P(x_0; \lambda) \min \left\{ \frac{1 - p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0 + 1)} \right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

หารสมการ (3.5) ด้วย  $NB(x_0; n, p)$  ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \right| \\ &\leq (e^\lambda - 1) \frac{P(x_0; \lambda)}{NB(x_0; n, p)} \min \left\{ \frac{1 - p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0 + 1)} \right\} \\ &\leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{p^{n + \min\{x_0, \lceil \lambda \rceil + 1\}}} \min \left\{ \frac{(1 - p^n)}{n}, \frac{q}{p(x_0 + 1)} \right\} \end{aligned}$$

สมการสุดท้ายได้มาโดยบทตั้ง 2.2 ดังนั้นสมการ (3.1) เป็นจริง #

**ทฤษฎีบท 3.2** ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นเหมือนในนิยาม 1.1 และ  $x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  แล้วเราจะได้

$$\begin{aligned} & 1 - (e^\lambda - 1) \min \left\{ \frac{1 - p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0 + 1)} \right\} \leq \frac{NB(x_0; n, p)}{P(x_0; \lambda)} \\ &\leq 1 + (e^\lambda - 1) \min \left\{ \frac{1 - p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0 + 1)} \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

**พิสูจน์** จากสมการ (3.5) ทหารด้วย  $P(x_0; \lambda)$  จะได้

$$\left| \frac{NB(x_0; n, p)}{P(x_0; \lambda)} - 1 \right| \leq (e^\lambda - 1) \min \left\{ \frac{1-p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0+1)} \right\}$$

หรือ

$$-(e^\lambda - 1) \min \left\{ \frac{1-p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0+1)} \right\} \leq \frac{NB(x_0; n, p)}{P(x_0; \lambda)} - 1 \leq (e^\lambda - 1) \min \left\{ \frac{1-p^n}{n}, \frac{q}{p(x_0+1)} \right\} \quad (3.7)$$

บวกตลอดสมการ (3.7) ด้วย 1 เราจะได้สมการ (3.6) ตามที่ต้องการ #

### ข้อสังเกต

1. ถ้า  $q$  มีค่าเข้าใกล้ 0 (หรือ  $p$  มีค่าเข้าใกล้ 1) หรือ  $\lambda$  มีค่าน้อย แล้วขอบเขตบนของสมการ (3.1) จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ส่วนขอบเขตของสมการ (3.4) จะมีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงทวินามนิเสธด้วยการแจกแจงปัวซองจะมีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อ  $q$  มีค่าเข้าใกล้ 0 หรือ  $\lambda$  มีค่าน้อย

2. เมื่อ  $\lambda$  คงที่ เราจะเห็นว่าขอบเขตของการประมาณการแจกแจงของทั้งสองทฤษฎีจะแคบลงตามค่า  $n$  ที่เพิ่มขึ้น ซึ่งในกรณีนี้ เมื่อ  $n$  มีค่ามากจะทำให้การประมาณปัวซองได้ผลดี

### ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้เราได้ยกตัวอย่างเชิงตัวเลข เพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ของการประมาณการแจกแจงทวินามนิเสธด้วยการแจกแจงปัวซองที่อยู่ในทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2

**ตัวอย่าง 4.1** ให้  $n = 100$  และ  $p = 0.999$  ดังนั้น  $\lambda = 0.1001001$  และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้มาจากทฤษฎีบท 3.1 และ 3.2 สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\left| 1 - \frac{P(x_0; 0.1001001)}{NB(x_0; 100, 0.999)} \right| \leq \begin{cases} 0.00010023, & x_0 = 0 \\ 0.00005274, & x_0 = 1 \\ \frac{0.00010559}{x_0 + 1}, & x_0 \geq 2 \end{cases}$$

และ

$$0.99989976 \leq \frac{NB(x_0; 100, 0.999)}{P(x_0; 0.1001001)} \leq 1.00010024, \quad x_0 = 0$$

$$1 - \frac{0.00010539}{x_0 + 1} \leq \frac{NB(x_0; 100, 0.999)}{P(x_0; 0.1001001)} \leq 1 + \frac{0.00010539}{x_0 + 1}, \quad x_0 \geq 1$$

**ตัวอย่าง 4.2** ให้  $n = 500$  และ  $p = 0.999$  เราจะได้  $\lambda = 0.5005005$  และผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่หาได้ คือ

$$\left| 1 - \frac{P(x_0; 0.5005005)}{NB(x_0; 500, 0.999)} \right| \leq \begin{cases} 0.00051122, & x_0 = 0 \\ 0.00032534, & x_0 = 1 \\ \frac{0.00065134}{x_0 + 1}, & x_0 \geq 2 \end{cases}$$

และ

$$0.99948865 \leq \frac{NB(x_0; 500, 0.999)}{P(x_0; 0.5005005)} \leq 1.00051135, \quad x_0 = 0$$

$$1 - \frac{0.00065020}{x_0 + 1} \leq \frac{NB(x_0; 500, 0.999)}{P(x_0; 0.5005005)} \leq 1 + \frac{0.00065020}{x_0 + 1}, \quad x_0 \geq 1$$

**ตัวอย่าง 4.3** กำหนดให้  $n = 5000$  และ  $p = 0.999$  แล้วจะได้  $\lambda = 5.00500501$  และผลลัพธ์เชิงตัวเลขของการประมาณการแจกแจงเป็นดังนี้

$$\left| 1 - \frac{P(x_0; 5.00500501)}{NB(x_0; 5000, 0.999)} \right| \leq \begin{cases} 0.02947655, & x_0 = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0.02477954, & x_0 = 5 \\ 0.02126087, & x_0 = 6 \\ \frac{0.14897504}{x_0 + 1}, & x_0 \geq 7 \end{cases}$$

และ

$$0.97056759 \leq \frac{NB(x_0; 5000, 0.999)}{P(x_0; 5.00500501)} \leq 1.02943241, \quad x_0 = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$1 - \frac{0.14830614}{x_0 + 1} \leq \frac{NB(x_0; 5000, 0.999)}{P(x_0; 5.00500501)} \leq 1 + \frac{0.14830614}{x_0 + 1}, \quad x_0 \geq 5$$

### ข้อสังเกต

1. จากตัวอย่างเชิงตัวเลขทั้งสามตัวอย่างที่ได้แสดงไปนั้น เราสามารถสังเกตได้ว่าขอบเขตของการประมาณปัวซองจะแคบลงเมื่อ  $x_0$  มีค่าเพิ่มขึ้น หรือขอบเขตของการประมาณเป็นฟังก์ชันลดสำหรับ  $x_0$

2. เมื่อ  $p$  คงที่ เราจะเห็นว่าขอบเขตของการประมาณ จะกว้างขึ้นตามค่า  $n$  หรือ  $\lambda$  ที่เพิ่มขึ้น แสดงว่า  $\lambda$  ที่มีค่าน้อย จะให้ผลของการประมาณดีกว่า  $\lambda$  ที่มีค่ามาก

## สรุปผลการวิจัย

ขอบเขตบนของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และขอบเขตของอัตราส่วนระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธที่มีพารามิเตอร์  $n$  และ  $p$  และตัวแปรสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์  $\lambda = \frac{np}{p}$  (ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มทวินามนิเสธ) เป็นเพียงเกณฑ์แบบหนึ่งที่ใช้วัดความถูกต้องของการประมาณปัวซอง ซึ่งจากผลการวิจัยเราพบว่าผลลัพธ์ของการประมาณปัวซองจะมีความถูกต้องและสามารถยอมรับได้ ถ้าขอบเขตบนของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าเข้าใกล้ 0 หรือขอบเขตของอัตราส่วนมีค่าเข้าใกล้ 1 หรืออาจสรุปในลักษณะที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ได้ว่า “ผลลัพธ์ของการประมาณปัวซองแต่ละแบบจะให้ผลการประมาณที่ดีและมีความถูกต้องเมื่อ  $q$  หรือ  $\lambda$  มีค่าน้อย” ซึ่งสอดคล้องกับกฎของเลขจำนวนน้อย (The Law of Small Number) ในทฤษฎีความน่าจะเป็น

## กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี ที่ได้จัดสรรเงินงบประมาณเงินรายได้ประจำปี 2550 เพื่อสนับสนุนการวิจัยครั้งนี้ และคณะผู้วิจัยขอขอบคุณกรรมการผู้อ่านผลงานวิจัยทุกท่านที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ จนทำให้ผลงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

## เอกสารอ้างอิง

- Barbour, A.D., Holst, L., & Janson, S. (1992). *Poisson approximation. Oxford Studies in probability 2.* Oxford : Clarendon Press.
- Cacoullos, T., & Papathanasiou, V. (1989). Characterization of distributions by variance bounds. *Statistics & Probability Letters*, 7, 351-356.
- Johnson, N.L., Kotz, S., & Kemp, A.W. (2005). *Univariate Discrete Distributions.* (3rd ed.). New York : Wiley.

Majsnerowska, M. (1998). A note on Poisson approximation by  $w$ -functions. *Applicationes Mathematicae*, 25, 387-392.

Stein, C.M. (1986). *Approximate Computation of Expectations.* Hayward California : IMS.

Teerapabolarn, K. (2007). A bound on the Poisson-binomial relative error. *Statistical Methodology*, 4, 407-415.

Teerapabolarn, K., & Wongkasem, P. (2007). Poisson approximation for independent geometric random variables. *International Mathematical Forum*, 2, 3211-3218.