ตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทสำหรับตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่มแบบมีลำดับ: การวิเคราะห์ความไว

Polychotomous logit models with Ordinal Categorical Responses: A Sensitivity Analysis

วีรานันท์ พงศาภักดี และ สุจินต์ สุขกุมภาพันธ์

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์

Veeranun Pongsapukdee* and Sujin Sukgumphaphan

Department of Statistics, Faculty of Science, Silpakorn University, Nakhon-Pathom, Thailand 73000.

บทคัดย่อ

ในการตรวจสอบตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทที่มีอิทธิพลร่วมของตัวแปรอธิบายสองตัวแปร อาศัยตัวสถิติผลรวมของการพยากรณ์กลุ่มทุกกลุ่มได้ถูกต้อง (Sensitivity) และตัวสถิติภาวะสารูปดี เมื่อตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่ม Y เป็นแบบมีลำดับ 3 กลุ่มและตัวแปรอธิบาย (X1, X2) เป็นแบบแบ่งกลุ่ม ประกอบด้วยตัวสถิติ Likelihood Ratio statistic (G_{M}), Generalized Coefficients of Determination (R^2 analogs), Bayesian's Information Criteria (BIC), Akaike Information Criteria (AIC) ศึกษาภายใต้การแจกแจงของตัวแปรอธิบาย 3 แบบคือ (X_1, X_2) ~ multinomial (π_1, π_2, π_3, π_4) : (0.10, 0.35, 0.45, 0.10), (0.50, 0.30, 0.10, 0.10), (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) ที่สอดคล้องกับค่าของ (X_1, X_2) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) ตามลำดับ และพารามิเตอร์ของตัวแบบคือ $\alpha_1 = \log \frac{p_1}{p_2+p_3}$ $\alpha_1 = \log \frac{p_1+p_2}{p_3}$, $\beta_1 = \log 2$, $\beta_2 = \log 3$, $\beta_{12} = \log 2$ =0-4.5 (เพิ่มทีละ 0.3) และการแจกแจงของ Y's 4 แบบคือ Y~ multinomial (p1, p2, p3): (0.05, 0.20, 0.75), (0.25, 0.50, 0.25), (0.5, 0.20, 0.25), และ (0.33, 0.33, 0.33) โดยใช้ขนาดตัวอย่าง 4 ขนาดคือ 600, 800, 1,000, และ 1,500 การจำลองแบบทำซ้ำในแต่ละเงื่อนไข 1,000 ครั้งด้วยโปรแกรม Macro ที่พัฒนาขึ้นมาประมวลผลร่วมกับ MINITAB Version 11 (ไวยากรณ์คำสั่ง) และ 15 (กราฟพล็อต)

ผลของการวิจัย ประเด็นแรกพิจารณาจากลักษณะการแจกแจงของ Y's ภายใต้แต่ละการแจกแจงของ (X_1, X_2) พบว่า เมื่อลักษณะของการแจกแจงของ Y ซึ่งมีสัดส่วนของแนวโน้มชัดเจนคือ Y ~ multinomial (0.05, 0.20, 0.75) ตัวแบบมี Sensitivity ของการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องได้ดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของ Y's แบบอื่นอีก 3 แบบในทุกลักษณะการแจกแจงของ (X_1, X_2)'s รองลงมาคือ Y~ multinomial (0.33, 0.33, 0.33), (0.25, 0.50, 0.25) และ (0.55, 0.20, 0.25) ตามลำดับ โดยค่าของ Sensitivity เพิ่มขึ้นเมื่อค่าของ β_{12} และขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ประเด็นที่สองพิจารณาจากลักษณะการแจกแจงของ (X_1, X_2)'s ภายใต้แต่ละการแจกแจงของ Y พบว่า เมื่อการแจกแจงของ (X_1, X_2) มีลักษณะของสัดส่วนความน่าจะเป็นแบบสมมาตร คือ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) ตัวแบบมี Sensitivity ของการพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของ (X_1, X_2)'s แบบอื่นๆ ในเกือบทุกลักษณะการแจกแจงของ Y's รองลงมาคือ (X_1, X_2)~ multinomial (0.50, 0.30, 0.10, 0.10) และ (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) ตามลำดับ ยกเว้นกรณีเดียวที่ Y~ multinomial (0.5, 0.20, 0.25) และ (X_1, X_2)~multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) ตัวแบบให้ผลลัพธ์ดีกว่าของการแจกแจงของ (X_1, X_2) อีก 2 แบบ ณ Y เดียวกัน แต่ผลลัพธ์ดังกล่าวยังมีความแปรปรวนค่อนข้างสูง ประเด็นสุดท้ายพิจารณาจากตัวสถิติภาวะสารูปดีต่างๆ พบว่า เมื่อลักษณะการแจกแจงของ Y แบบมีสัดส่วนของแนวโน้มชัดเจน และแบบสมมาตร ส่วนของตัวแปรอธิบายเป็นแบบสมมาตร ตัวแบบมี Sensitivity ของการพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของแบบอื่นๆ นอกจากนี้ค่าของตัวสถิติภาวะสารูปดี R^2 analogs ยังมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ส่วน G_M, AIC, และ BIC มีแนวโน้มลดลง ตามขนาดตัวอย่างและขนาดของพารามิเตอร์อิทธิพลร่วมของสองตัวแปรอธิบายตามลำดับ ซึ่งให้ผลลัพธ์ดีขึ้นทุกค่า และมีความคงเส้นคงวาที่สอดคล้องกับผลลัพธ์ทางทฤษฎีซึ่งสามารถใช้ในการตรวจสอบตัวแบบต่อไป

คำสำคัญ : Polychotomous logit models, Sensitivity, Deviances, Bayesian's Information Criteria.

*** Corresponding author.** E-mail: veeranun@su.ac.th

Abstract

The sensitivity analyses of polychotomous logit models with ordinal response categories and two nominal explanatory variables with interaction term are performed. The magnitude of goodness-of-fit statistics, the coefficients of determination or R^2 analogs, and the likelihood ratio statistic, G_M, AIC (Akaike Information Criterion, Akaike, 1973), BIC (Baysian Information Criterion, Schwarz, 1978) are also calculated. Simulations have been conducted for the multinomial logit models with K=3 response categories and two explanatory variables (X_1, X_2) whose joint distribution of (X_1, X_2) is assumed to be multinomial with probabilities of π_1, π_2, π_3, π_4, corresponding to (X_1, X_2) values of (0, 0), (0,1), (1, 0), (1, 1), respectively. Three sets of (π_1, π_2, π_3, π_4) are studied to represent different distributional shapes, which were chosen to induce possibly strong effects such that β_1 = log 2, β_2 = log 3, and β_{12} = 0.0-4.5, namely (X_1, X_2) ~ multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10), (X_1, X_2) ~ multinomial (0.50, 0.30, 0.10, 0.10), and (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25). Four sets of the three ordered category distributing corresponding with the (X_1, X_2) were again generated through the models under the proportions of (p_1, p_2, p_3), namely Y ~ multinomial (p_1, p_2, p_3): (0.05, 0.20, 0.75), (0.25, 0.50, 0.25), (0.55, 0.20, 0.25), and (0.33, 0.33, 0.33) from which it follows that the true model intercepts are $\alpha_1 = \log \dfrac{p_1}{p_2+p_3}$ $\alpha_1 = \log \dfrac{p_1+p_2}{p_3}$ corresponding to the proportions of Y = 1, 2, 3, respectively. Four sample sizes of 600, 800, 1,000, and 1,500 units were conducted. Each condition was carried out for 1,000 simulations using the developed macro program run with the Minitab Release 11 (command syntax) and 15 (graph plots).

The research results, based on the sensitivity and goodness-of-fit statistics, show that the models under the distributions of Y ~ multinomial (0.05, 0.20, 0.75) and Y ~ multinomial (0.33, 0.33, 0.33) perform better than those of other conditions of Y's, for every distribution of (X_1, X_2) in term of the sensitivity totals, of which the values also tend to increase as β_{12} and the sample size are increased. In addition when (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25), the sensitivity results are superior to those of other distributions of (X_1, X_2)'s for most distributions of Y's. The goodness-of-fit statistics, R^2 analogs, increase, while as the G_M, AIC and BIC statistics decrease, as the β_{12} and the sample size are increased. Therefore, not only the sensitivity plots but also the goodness-of-fit statistics are generally consistent, of which the results improve the model fits as sample sizes are large.

Keywords : Polychotomous logit models, Sensitivity, Deviances, Bayesian's Information Criteria.

บทนำ

การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity analysis) สำหรับการพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องด้วยตัวแบบเชิงสถิติ Agresti (2002) ได้ให้ความหมายของ "sensitivity" ไว้คือ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) ที่ผลลัพธ์ที่สนใจจากตัวแบบจะตรงกับผลลัพธ์ที่ผู้เชี่ยวชาญได้วินิจฉัยไว้ หรือเป็นจริงสำหรับประชากรที่เราทดลองหรือสุ่มตัวอย่างมาศึกษา

ตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิท (polychotomous logit models) ขยายจากตัวแบบโลจิทแบบพื้นฐานที่ตัวแปรหลักหรือตัวแปรตอบสนอง (response variable) มีเพียง 2 กลุ่มหรือทวิภาค (dichotomous or binary response categories) มาเป็นแบบหลายกลุ่ม (polychotomous response categories) ซึ่งหมายรวมถึงตัวแบบที่มีตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่ม (categorical variable) ที่มีการแจกแจงแบบ Multinomial ซึ่งเป็นแบบมีลำดับ (ordinal) หรือแบบแบ่งกลุ่ม (nominal) ที่ไม่มีลำดับได้ ส่วนตัวแปรอธิบายต่างๆ สามารถใช้ได้ทั้งแบบต่อเนื่อง (continuous) แบบเชิงกลุ่ม (categorical) หรือทั้งสองแบบ ตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทที่ใช้บ่อยมีหลายตัวแบบ เช่น ตัวแบบ cumulative logit models ซึ่งเป็นตัวแบบหนึ่งในกลุ่มของตัวแบบเชิงเส้นที่วางนัยทั่วไป (GLMs or generalized linear models), (Nelder & Wedderburn, 1972; McCullagh & Nelder, 1989; McCulloch, 2000) ซึ่งในปัจจุบันได้ขยายขอบเขตของทฤษฎีและวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบสำหรับตัวแปรตอบสนองจากแบบแบ่งกลุ่มสองกลุ่มหรือมากกว่าให้ใช้ได้สำหรับตัวแปรตอบสนองแบบมีลำดับตั้งแต่ 3 กลุ่มขึ้นไป ดังนั้นตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทจึงรวมตัวแบบในรูปแบบของ Proportional odds logit models (McCullagh, 1980) และตัวแบบอื่นๆ ที่ตัวแปรตอบสนองมีลำดับและมีการแจกแจงแบบมัลติโนเมียล (multinomial logit models for ordinal responses) และ Agresti, 2002 ยังได้ เรียกกลุ่มของตัวแบบเหล่านี้รวมๆ ว่า ตัวแบบโลจิทสำหรับตัวแปรตอบสนองแบบมัลติโนเมียล (logit models for multinomial responses) ซึ่งแต่ละตัวแบบจะแตกต่างกันในรายละเอียดตามเงื่อนไขและข้อตกลง (assumptions) ของตัวแบบ

ให้ Y_{ik} แทนตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่มจำนวน k กลุ่ม ที่มี y_{ik} แทนค่าสังเกตที่ i (i = 1, 2, . . ., n) และมีระดับที่ k (k = 1, 2, . . ., K) โดยค่าสังเกตที่ $y_{ik} = 1$ เมื่อค่าสังเกตนั้นอยู่ในระดับที่ k และ $y_{ik} = 0$ อื่นๆ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{K} y_{ik} = n$ และสามารถจัด Y_{ik} ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ $\mathbf{Y_i} = (Y_{i1}, . . ., Y_{ik})'$ โดยที่สัดส่วนของตัวแปรตอบสนองที่ k คือ $p_{ik} = E(Y_{ik})$, $\sum_{k=1}^{K} p_{ik} = 1$ ดังนั้นเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{Y_i}$ มีการแจกแจงแบบมัลติโนเมียลด้วยเวกเตอร์สัดส่วนความน่าจะเป็น $\mathbf{p_i} = (p_{i1}, . . ., p_{iK})'$

สมมติให้ค่าสังเกต y_{ik} แต่ละหน่วยมีเวกเตอร์ของตัวแปรอธิบาย $\mathbf{x_i} = (x_{i1}, . . ., x_{iq})'$ และอาศัยฟังก์ชันเชื่อมโยง (link functions) ที่มีทางเลือกสำหรับตัวแบบได้หลายแบบ โดยมีรูปทั่วไปดังนี้

$$L_{ik} = L_{ik}(\mathbf{p_i}) = \alpha_k + x_i'\beta \quad \text{สำหรับ } k = 1, . . ., K\text{-}1$$

ตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทที่ **Y** มี K กลุ่มหรือ K ระดับ มีกรณีพิเศษต่างๆ เช่น ตัวแบบที่อาศัยฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบโลจิท (Logit link functions) (Agresti, 2002) ที่นิยมใช้ทั่วไป ดังตัวแบบต่อไปนี้

ตัวแบบโลจิทของกลุ่มประชิด (The adjacent categories logit model) (Goodman, 1983; Anderson, 1984) คือ

$$L_{ik} = \log\,(p_{i,k+1}/p_{ik}) = \alpha_k + x_i'\beta \qquad ...(1)$$

ตัวแบบโลจิทสะสม (The cumulative logit model)(Walker & Duncan, 1967; McCullagh & Nelder, 1989) คือ

$$L_{ik} = \log\left(\frac{p_{i,k+1} + ... + p_{iK}}{p_{i1} + ... + p_{ik}}\right) = \alpha_k + x_i'\beta \qquad ...(2)$$

ตัวแบบโลจิทของกลุ่มติดต่อกันไป (The continuation logit model)(Fienberg, 1980; Agresti, 1990) คือ

$$L_{ik} = \log\left(\frac{p_{i,k+1}}{p_{i1} + ... + p_{ik}}\right) = \alpha_k + x_i'\beta \qquad ...(3)$$

ตัวแบบ The proportional odds ratio (McCullagh, 1980)

$$\log\left(\frac{p_{i,k+1} + ... + p_{iK}}{p_{i1} + ... + p_{ik}}\right) = \alpha_k + x_i'\beta \qquad ...(4)$$

ตัวแบบ The proportional odds ratio with two-factor interaction (Pongsapukdee & Sukgumphaphan, 2007)

$$\log\left(\frac{p_{i,k+1} + ... + p_{iK}}{p_{i1} + ... + p_{ik}}\right) = \alpha_k + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} \qquad ...(5)$$

โดยที่ k = 1, 2,..., K-1, i = 1, 2,...n เมื่อใช้ตัวแปร X's จำนวน 2 ตัวแปร

ตัวแบบ (1)-(5) เป็นตัวแบบที่ใช้ฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบโลจิท (logit link function) นอกจากนี้ยังมีฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบอื่นๆ ที่น่าสนใจนำมาใช้เป็นทางเลือกของฟังก์ชันเชื่อมโยงแทนแบบโลจิท นั่นคือ ฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบโพรบิท (probit link function) ฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบคอมพลีเมนทารีล็อก-ล็อก (complementary-log-log link function) ถ้าเป็นกรณีตัวแปรตอบสนองแบบมีลำดับ และสัดส่วนของตัวแปรตอบสนองมีลักษณะสมมาตรแล้ว เราอาจสนใจเลือกใช้ตัวแบบโพรบิทในรูปแบบ เช่น

ตัวแบบโพรบิทสะสม (The cumulative probit models) (Agresti, 2002)

$$L_{ik} = \phi^{-1}(p_{i,k+1} + \ldots + p_{iK}) = \alpha_k + x_i'\beta \qquad \ldots(6)$$

โดยที่ $\phi(.)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบปกติ (The normal cumulative distribution function)

ทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันโพรบิท เราอาจใช้ฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบคอมพลีเมนทารีล็อก-ล็อก ซึ่งใช้ในสถานการณ์ที่แตกต่างกันออกไปคือ ใช้ในกรณีสัดส่วนของตัวแปรตอบสนองมีลักษณะไม่สมมาตร เช่น มีลักษณะที่ออกจาก 0 ช้าๆ แต่เข้าใกล้ 1 อย่างรวดเร็ว หรือออกจาก 1 ช้าๆ แต่เข้าใกล้ 0 ค่อนข้างรวดเร็ว ถ้าตัวแปรตอบสนองเป็นแบบมีลำดับ เราอาจสนใจเลือกใช้ตัวแบบทางเลือกเช่น

ตัวแบบคิวมูเลทิฟคอมพลีเมนทารีล็อก-ล็อก (The cumulative complementary-log-log models) (Agresti, 2002)

$$L_{ik} = \log\left\{-\log(p_{i,k+1} + \ldots + p_{iK})\right\} = \alpha_k + x_i'\beta \qquad (7)$$

โดยที่ทุกตัวแบบข้างต้น $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(\beta)$ เมื่อ $\beta' = (\alpha', \beta')$

ตัวแบบ (1) - (7) และตัวแบบโลจิทอื่นๆ ในปัจจุบันมีที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลค่อนข้างแพร่หลาย มีลักษณะเป็นตัวแบบเชิงสถิติโดยตรง (statistical models) ใช้สำหรับวิเคราะห์และประเมินผลข้อมูลเพื่อศึกษาอิทธิพลของปัจจัยหรือตัวแปรอธิบาย (explanatory variables) ที่สนใจต่างๆ ว่าจะมีอิทธิพลเชิงสถิติต่อตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่ม (categorical response) หรือไม่อย่างไร ถ้ามีอิทธิพลจะเป็นอิทธิพลแบบใด ขนาดใด และเป็นอิทธิพลหลักหรืออิทธิพลร่วม ตลอดจนสนใจเลือกตัวแบบเชิงสถิติที่สามารถนำไปจำแนกหรือพยากรณ์กลุ่มของตัวแปรตอบสนองได้ถูกต้องอย่างมีประสิทธิภาพทางสถิติ ในทางปฏิบัติอาจสนใจจำแนกผลลัพธ์หรือพยากรณ์กลุ่มของเหตุการณ์ว่าเป็นประเภทใด เช่น ประสบความสำเร็จ ไม่ประสบความสำเร็จ หรือ ให้ผลลัพธ์ระดับดีมาก ปานกลาง แย่ หรือ มีการควบคุมคุณภาพได้ในระดับสูง กลาง ต่ำ ฯลฯ การศึกษาสมบัติ (properties) ของตัวแบบต่างๆ ภายใต้ตัวแปรตอบสนองและตัวแปรอธิบาย จะเป็นประโยชน์ต่อการสร้างตัวแบบเชิงสถิติและการวินิจฉัยผลลัพธ์ของตัวแบบ เป็นการศึกษาวิจัยแบบพื้นฐานในทางทฤษฎีของตัวแบบ ช่วยให้สามารถกำหนดขนาดตัวอย่างและตัดสินใจเลือกตัวแบบที่ควรใช้ได้ใกล้เคียงและถูกต้องตามลำดับ เพื่อตรวจสอบอิทธิพลต่างๆ หรือพยากรณ์เหตุการณ์ที่สนใจอย่างมีเหตุผล ซึ่งโดยทั่วไปเป็นคำถามที่เกิดขึ้นในชีวิตจริงในสังคม เช่น การจัดสถานภาพของพืชหรืออาหารให้อยู่ในประเภทดีมาก ดี ปานกลาง พอใช้ ไม่ดี อันตราย การวินิจฉัยหรือจัดระดับคนไข้ที่เป็นโรคหนึ่งให้อยู่ในขั้นหนัก ขั้นปานกลาง ขั้นเริ่มต้น หรือปกติ หลักทรัพย์บางตัวถูกธนาคารชาติจัดให้อยู่ในระดับสูง ปานกลางและอนุญาตให้ดำเนินการต่อไปได้ แต่บางตัวถูกธนาคารชาติสั่งปิด บริษัทผลิตยาฆ่าแมลงที่ต้องการกำหนดระดับความเข้มข้นอย่างน้อยเท่าไรจึงสามารถฆ่าแมลงได้ 80%, 90%, หรือ 100% การศึกษาเทคนิคแบบใดหรือองค์ประกอบแบบใดที่พบว่ามีอิทธิพลต่อองค์กรหรือบุคลากร และนำมาจำแนกองค์กรหรือบุคลากร ให้อยู่ในระดับดีมาก ปานกลาง หรือ ล้มเหลว การเป็นโรคมะเร็งโสตนาสิกอาจเกี่ยวข้องกับการใช้มือถือ ความเครียด อาชีพ กรรมพันธุ์ เพศ สิ่งแวดล้อม หรือ อื่นๆ ฯลฯ เหล่านี้ล้วนต้องการใช้ตัวแบบเชิงสถิติช่วยหาข้อสรุป

ตัวแบบเชิงสถิติในกลุ่มของตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทในรูปแบบหนึ่งๆ จะช่วยตอบคำถามข้างต้นได้ค่อนข้างสะดวก สามารถทราบความแม่นยำและร้อยละของการจำแนกกลุ่มถูกต้อง แต่การใช้ตัวแบบใดอย่างเหมาะสม ต้องพิจารณาจากหลายด้าน เช่น ด้านข้อมูล ลักษณะการแจกแจงตัวอย่างเช่นของสัดส่วนที่สนใจ (based rate, Menard, 1995) ตัวสถิติที่วัดภาวะสารูปดีต่างๆ ฯลฯ และยังต้องการการศึกษาวิจัยเพิ่มเติมอย่างไม่หยุดยั้ง เพื่อหาสารสนเทศได้ตรงกับที่ต้องการ หลักเกณฑ์เบื้องต้นที่ใช้ในปัจจุบันพิจารณาจากความนิยมและลักษณะของของตัวแปรตอบสนองว่ามีลักษณะเชิงกลุ่มแบบใด ได้แก่ แบบแบ่งกลุ่ม (nominal) แบบมีลำดับ (ordinal) แบบช่วง (interval) ลักษณะการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรตอบสนอง และเทคนิคการสร้างตัวแบบเชิงสถิติจะแตกต่างกันภายใต้การแจกแจงของตัวแปรตอบสนองแบบเชิงกลุ่มเช่น Bernoulli, Binomial, Negative binomial, Poisson, Multinomial ฯลฯ รวมทั้งการเลือกใช้ตัวแปรอธิบายต่างๆ (Aitkin et al., 1989) เช่น การจำแนกกลุ่มที่สนใจภายใต้ตัวแปรตอบสนองแบบเชิงกลุ่มแบบสองกลุ่ม อาจใช้ตัวแบบโลจิททั้งแบบง่ายและแบบซับซ้อน (simple or more complex logit models, Pongsapukdee, 2006) และอาจสนใจศึกษาเฉพาะ

อิทธิพลหลัก (main effects) เพียงบางตัว หรืออาจสนใจอิทธิพลร่วม (interactions) ของหลายปัจจัยเมื่อปัจจัยเหล่านั้น หรือ ตัวแปรอธิบายในตัวแบบมีลักษณะเชิงกลุ่ม โดยเฉพาะอาจสนใจการจำแนกกลุ่มหรือการพยากรณ์กลุ่มของตัวแปรตอบสนองด้วยเซตของตัวแปรอธิบายที่นำเข้ามาศึกษาในตัวแบบ (Agresti, 2002)

อย่างไรก็ตามในปัจจุบันถึงแม้เราสามารถใช้หรือสร้างตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทได้สะดวกขึ้นโดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ แต่ก็ยังมีปัญหาของการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ ปัญหาการเลือกตัวแบบที่ต้องขึ้นอยู่กับการทดสอบภาวะสารูปดี (goodness of fit) ของตัวแบบต่างๆ (Paul and Deng, 2000; Pongsapukdee & Kumsri, 2006; Pongsapukdee & Sukgumphaphan, 2007) ปัญหาและข้อระมัดระวังเกี่ยวกับประสิทธิภาพของตัวสถิติภาวะสารูปดี (Liao & McGee, 2003) ปัญหาการประเมินตัวแบบและความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรด้วยวิธีต่างๆ (Menard, 2000; Agresti, 2002) ภายใต้ขนาดตัวอย่างที่พอเหมาะกับเงื่อนไขของการแจกแจงของตัวแปรต่างๆ (Shieh, 2001) ตลอดจนลักษณะของตารางการณ์จรที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่อาจทำให้เกิดบางเซลมีข้อมูลน้อย (sparse) หรือเป็นศูนย์ (Everitt, 1992; Sukgumphaphan & Pongsapukdee, 2008)

นอกจากนี้ในปัจจุบันมีงานวิจัยใหม่ๆ ที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับความสามารถของตัวแบบในการจำแนกหรือพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องเพียงไร หรือมีประสิทธิภาพเพียงไร ซึ่งหมายรวมถึงการวิเคราะห์ความไวของตัวแบบเชิงเส้นที่วางนัยทั่วไปโดยตรง (Cross & Beissinger 2001; Kass & Vaidyanathan, 1992; Molenberghs et al., 2001; Saltelli et al., 2000) อย่างไรก็ตามยังมีบางประเด็นที่ต้องการงานวิจัยค้นคว้าและสนับสนุนเพิ่มเติมต่อไป ผลงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องเช่นของ Cross & Beissinger (2001) ได้ศึกษาตัวแบบโลจีสติกในกรณี 2 กลุ่มโดยการวิเคราะห์ความไวที่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของความน่าจะเป็นเมื่อตัวแปรอธิบายเปลี่ยนแปลงไปในรูปของสัมประสิทธิ์การถดถอยมาตรฐาน (standardized regression coefficients) พบว่า ถ้าตัวแปรอธิบายเป็นแบบต่อเนื่องไม่ควรใช้เทอมอิทธิพลร่วม เนื่องจากเทอมของสัมประสิทธิ์การถดถอยมาตรฐานบอกอิทธิพลของตัวแปรอิสระตัวหนึ่งที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อตัวแปรอิสระที่เหลือเป็นอิสระต่อกันหรือเปลี่ยนแปลงเชิงสุ่มนั่นเอง แต่ถ้าตัวแปรอธิบายเป็นแบบเชิงกลุ่ม และสนใจศึกษาทั้งอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วม จะสามารถประเมินเทอมอิทธิพลร่วมได้ดี ภายใต้ตัวแบบที่เลือกให้เหมาะสม (McCarthy, et al., 1996) และนำไปสู่การใช้ตัวแบบต่อไป Kass & Vaidyanathan (1992) ได้ศึกษาความไว (sensitivity) สำหรับการทดสอบความเท่ากันของสัดส่วนแบบทวินาม เฉพาะกรณีที่ขนาดตัวอย่างระหว่างกลุ่มเท่ากันและ log odds ratio = 0 พบว่าการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ Prior ของตัวสถิติทดสอบแบบเบย์เพียงเล็กน้อย ผลของการทดสอบไม่เปลี่ยนแปลง Molenberghs, et al. (2001) ศึกษาการวิเคราะห์ความไวสำหรับตารางการณ์จรที่ไม่สมบูรณ์อันเนื่องจากข้อมูลที่ไม่ครบแบบสุ่ม (missing at random) หรือเนื่องจากข้อมูลไม่ครบแบบสุ่มสมบูรณ์ (missing completely at random) โดยเสนอวิธีวิเคราะห์ที่เปรียบเทียบกับวิธีแบบเดิมและประยุกต์กับข้อมูลจริง ซึ่งได้ผลน่าพอใจ Saltelli, et al. (2000) ศึกษาการวิเคราะห์ความไวที่ใช้สำหรับตัวแปรต่อเนื่องแต่นำมาใช้กับตัวแปรไม่ต่อเนื่อง พบว่ายังมีประโยชน์ในการประเมินตัวแบบให้ชัดเจนขึ้นด้านการยืนยันตัวแบบ (model corroboration) การหาตัวแบบและการจำแนกกลุ่ม (model identification and discrimination) และการเทียบตัวแบบ (model calibration) ส่วนงานวิจัยอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบ GLMs เช่น Cole et al. (2004) ได้ศึกษาตัวแบบ GLMs ในรูปแบบของ Cumulative Odds Ratios ที่ไม่ขึ้นอยู่กับข้อสมมติว่า อิทธิพลของตัวแปรอธิบายที่มีต่อตัวแปรตอบสนองของแต่ละกลุ่มเท่ากัน (homogeneous across thresholds of ordered response) พบว่าตัวประมาณมีสมบัติของความไม่เอนเอียงและให้ค่า 95% ช่วงเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ได้เหมาะสม และ Paul & Deng (2000) ได้เปรียบเทียบภาวะสารูปดี สำหรับตัวแบบ GLMs ภายใต้ตัวสถิติทดสอบ Deviance or likelihood ratio และ Modified Pearson statistic พบว่าให้ผลลัพธ์ดีในเทอมของกำลังการทดสอบ ส่วน Pongsapukdee & Kumsri (2006) ศึกษาตัวสถิติ ภาวะสารูปดีของตัวแบบโลจิทแบบสองกลุ่ม (binary response) ที่มีเฉพาะอิทธิพลหลัก พบว่าตัวสถิติสัมประสิทธิ์การกำหนดที่คำนวณจากฟังก์ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดใช้ได้ดีสำหรับตัวแบบโลจิทดังกล่าว และต่อมา Pongsapukdee & Sukgumphaphan (2007) ศึกษาภาวะสารูปดีของตัวแบบโลจิทแบบสามกลุ่มแบบมีลำดับที่ประกอบด้วยอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วม พบว่าเมื่อการแจกแจงของตัวแปรตอบสนองมีสัดส่วนที่มีมีแนวโน้ม ตัวแบบจะให้กำลังการทดสอบสูง และเมื่อตัวแปรตอบสนองมีสัดส่วนเป็นแบบสมมาตร ตัวแบบยังให้กำลังการทดสอบสูงเฉพาะเมื่อสัดส่วนการแจกแจงของตัวแปรอธิบายมีลักษณะสมมาตรด้วย และควรใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่เสมอเมื่อลักษณะการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้งของตัวแปรตอบสนองและตัวแปรอธิบายมีลักษณะ

ที่ไม่สมมาตร ตลอดจน Lipsitz et al. (1996) ได้ศึกษาตัวสถิติทดสอบภาวะสารูปดี 3 ตัว คือ ตัวสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (likelihood ratio statistic) ตัวสถิติสกอร์ (score statistic) และตัวสถิติวาลด์ (Wald's statistic) สำหรับตัวแบบทางเลือกของตัวแบบ GLMs พบว่าตัวสถิติสกอร์และตัวสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น มีความเสถียรมากกว่าตัวสถิติวาลด์ โดยวัดจากกำลังการทดสอบ ภายใต้การจำลองแบบแต่ละเงื่อนไข 400 ครั้ง นอกจากนี้ Holtbrugge & Schumacher (1991) ศึกษาตัวแบบโลจีสติกที่มีตัวแปรอธิบายหลายตัวแปรแต่เป็นแบบต่อเนื่องอย่างเดียวทุกตัวแปร โดยใช้การแจกแจงต่างกัน และเปรียบเทียบตัวแบบ Proportional Odds models ด้วยเทอม Significance ของ Wald's test และ Likelihood ratio test พบว่ามีความเอนเอียงของตัวประมาณพารามิเตอร์น้อยกว่าตัวแบบโลจีสติกอีกรูปแบบหนึ่งคือตัวแบบ Stereotype model (Anderson, 1984) แต่ตัวแบบหลังมีภาวะสารูปดีกับข้อมูลได้ดีขึ้นเมื่อมีการรวมกลุ่มของตัวแปรเชิงกลุ่มเข้าด้วยกัน (amalgamation of categories)

จากงานวิจัยข้างต้น ส่วนใหญ่ศึกษาตัวแบบภายใต้ตัวแปรตอบสนองแบบ 2 กลุ่ม และศึกษาตัวสถิติเพียงตัวหนึ่งตัวใดหรือบางตัว ส่วนการตรวจสอบตัวแบบใช้ตัวสถิติที่แตกต่างกันหรือใช้ซ้ำกันบ้าง แต่ยังไม่มีการศึกษาการวิเคราะห์ความไวด้วยเทอมของการจำแนกกลุ่มได้ถูกต้องของตัวแบบ งานวิจัยนี้จึงสนใจตรวจสอบประสิทธิผลของตัวแบบด้านการวิเคราะห์ความไวของการจำแนกกลุ่มได้ถูกต้อง ด้วยตัวแบบที่มีการแจกแจงของตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่มแบบหลายกลุ่มหรือโพลิโคโทมัสที่เป็นแบบมีลำดับ พร้อมกับศึกษาตัวสถิติ Likelihood ratio statistic ตัวสถิติ Generalized Coefficients of Determination (Menard, 2000) ตัวสถิติ Bayesian's Information Criteria (Schwarz, 1978; Burnham et al., 1994) ตัวสถิติ Akaike Information Criteria (Akaike, 1973) ตลอดจนตัวสถิติ PCC (Percentage of Correct Classification) เพื่อตรวจดูความสอดคล้องกันของตัวสถิติต่างๆ โดยศึกษากรณีที่ตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่มแบบมีลำดับ 3 กลุ่ม และตัวแปรอธิบายเชิงกลุ่มแบบ แบ่งกลุ่มไม่มีลำดับ (nominal) 2 ตัวแปร ภายใต้ตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทที่มีเพียงอิทธิพลหลัก และตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทที่มีทั้งอิทธิพลหลักและอิทธิพลร่วมสองตัวแปร

1.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อวิเคราะห์ความไวในการพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องด้วยตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทที่มีตัวแปรตอบสนองแบบมีลำดับและตัวแปรอธิบายแบบมัลติโนเมียลที่มีอิทธิพลร่วมภายใต้ลักษณะการแจกแจงและพารามิเตอร์แบบต่างๆ

1.2 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้สนใจศึกษาผลลัพธ์ทางทฤษฎีและสมบัติของตัวแบบเชิงสถิติภายใต้ตัวแบบที่ขยายผลลัพธ์ของตัวแปรตอบสนอง 2 กลุ่ม (dichotomous) เป็นแบบ 3 กลุ่ม (trichotomous) ด้วยวิธีการจำลองแบบข้อมูลด้วยคอมพิวเตอร์ประกอบด้วยการแจกแจงของตัวแปรตอบสนอง Y~ multinomial (p_1, p_2, p_3) ที่มีความน่าจะเป็น 4 แบบ และตัวแปรอธิบาย (X1, X2) ~ multinomial (π_1, π_2, π_3, π_4) ที่มีความน่าจะเป็น 3 แบบ ตลอดจนการใช้การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม u~uniform (0, 1) แบบต่อเนื่อง ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 4 ขนาดคือ 600, 800, 1,000 และ 1,500 หน่วย และขนาดของอิทธิพลร่วมระหว่างตัวแปรอธิบายที่กำหนดขนาดตั้งแต่ 0-4.5 โดยค่าเพิ่มขึ้นทีละ 0.3 รวมทั้งสิ้นมี (4 x 3 x 4 x 16) = 768 เงื่อนไข ในแต่ละเงื่อนไขทำซ้ำ 1,000 ครั้งๆ ละ 4 ตัวแปรๆ ละ n_i, i=1, ..., 4. เมื่อ n_i แทนขนาดตัวอย่าง 4 ขนาด คือ 600, 800, 1,000 และ 1,500 หน่วย ตัวแบบที่ใช้คือ Trichotomous logit model หรือ proportional odds ratio model ที่มี 3 กลุ่ม (K=3) และมีเทอมของอิทธิพลหลัก กับตัวแบบที่เพิ่มเทอมของอิทธิพลร่วมของสองตัวแปร (8)-(9) ตามลำดับ

ตัวแบบ Trichotomous logit model

$$\log\left(\frac{\mathbf{p}_{\mathbf{i1}}+\ldots+\mathbf{p}_{\mathbf{ik}}}{\mathbf{p}_{\mathbf{i,k+1}}+\ldots+\mathbf{p}_{\mathbf{i3}}}\right)=\alpha_k+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}, k=1,2,$$

$$i=1,2,\ldots,n. \qquad \ldots(8)$$

ตัวแบบ Trichotomous logit model with two-factor-interaction

$$\log\left(\frac{\mathbf{p}_{\mathbf{i1}}+\ldots+\mathbf{p}_{\mathbf{ik}}}{\mathbf{p}_{\mathbf{i,k+1}}+\ldots+\mathbf{p}_{\mathbf{i3}}}\right)=\alpha_k+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_{12} x_{1i} x_{2i},$$

$$k=1,2,\ i=1,2,\ldots,n. \qquad \ldots(9)$$

โดยที่ สัดส่วนของ Y_{ik} คือ p_{ik} = E(Y_{ik}), $\sum_{k=1}^{K} p_{ik}=1$, Y_{ik} แทนตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่ม (categorical response variable) ที่มี 3 กลุ่ม และ y_{ik} แทนค่าสังเกตที่ i, i = 1, 2, . . ., n ในระดับที่ k, k=1, 2, ..., K, K=3 โดยที่ y_{ik}= 1 เมื่อค่าสังเกตนั้นอยู่ในระดับที่ k และ y_{ik}= 0 กรณีอื่นๆ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{K} y_{ik}$ = n และสามารถจัด Y_{ik} ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ $\mathbf{Y_i}$= (Y_{i1}, . . ., Y_{ik})′ และ $\mathbf{Y_i}$ มีการแจกแจงแบบมัลติโนเมียลด้วยเวกเตอร์สัดส่วน $\mathbf{p_i}$=(p_{i1}, . . ., p_{iK})′.

2. การจำลองแบบ

1. กำหนดตัวแบบที่ถูกต้องเป็นตัวแบบ (9) คือ $L_{ik} = \alpha_k + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i}$, k = 1, 2, i = 1, 2, ..., n

2. คำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรตอบสนอง (Y) ที่ k (p_k), k = 1, 2, 3 โดยใช้เซตของพารามิเตอร์ $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ และ (X_1, X_2) ที่มีการแจกแจงแบบ multinomial ($\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$) ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ 3 แบบคือ (0.10, 0.35, 0.45, 0.10), (0.50, 0.30, 0.10, 0.10) และ (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) และขนาดของอิทธิพลร่วมระหว่าง $X_1 X_2$ ตั้งแต่ 0-4.5 มีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 0.3 และ β_1 = log 2, β_2 = log 3, $\alpha_1 = \log \frac{p_1}{p_2+p_3}$, $\alpha_2 = \log \frac{p_1+p_2}{p_3}$ ภายใต้ขนาดตัวอย่าง (n) 4 ขนาด คือ 600, 800, 1,000 และ 1,500 หน่วย

3. ตัวแบบและสูตรที่ใช้คำนวณ ดังนี้

$$p_1 = \frac{\exp(\alpha_1 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{i2} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i})}{1 + \exp(\alpha_1 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i})}$$

$$p_2 = \frac{\exp(\alpha_2 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{i2} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i})}{1 + \exp(\alpha_2 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i})} - p_1$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2$$

4. สร้างตัวแปรสุ่ม Y ให้ Y=1 ด้วยความน่าจะเป็น p_1, Y=2 ด้วยความน่าจะเป็น p_2 และ Y=3 ด้วยความน่าจะเป็น p_3 โดยใช้ข้อมูลจากการแจกแจงแบบ Y~ multinomial (P_1, P_2, P_3) ที่มีค่าพารามิเตอร์ความน่าจะเป็น 4 แบบ คือ (0.05, 0.20, 0.75), (0.25, 0.50, 0.25), (0.55, 0.20, 0.25) และ (0.33, 0.33, 0.33) แต่ละขนาดตัวอย่างสร้างเลขสุ่ม u แล้วนำ u ไปเปรียบเทียบกับค่า p_j ที่ได้จากข้อ 3. ของแต่ละแบบ ดังนี้

ถ้า $u < p_1$ แล้ว Y=1

ถ้า $p_1 \leq u < p_1 + p_2$ แล้ว Y=2

ถ้า $u \geq p_1 + p_2$ แล้ว Y=3 (ทำซ้ำตั้งแต่ข้อ 1-4 จำนวนเท่ากับขนาดตัวอย่าง 600)

5. นำข้อมูล X_1, X_2 จากข้อ 2 และ Y จากข้อ 4 ไปสร้างตัวแบบ (model fitting) ตามสมมติฐานว่างตัวแบบ (8) คือ

$$L_{ik} = \alpha_k + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i},\ k = 1,2,\ i = 1,2,...,n.$$

6. บันทึกค่าสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น ($-2D_1$)

7. สร้างตัวแบบจากข้อมูลที่จำลองขึ้นในข้อ 2 และ 4 ตามสมมติฐานทางเลือกตัวแบบ (9)

$$L_{ik} = \alpha_k + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i}, k = 1,2, \mathrm{K} = 3,$$

$$i = 1,2,...n$$

8. บันทึกค่าสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น ($-2D_2$)

9. คำนวณ Change of deviances D (partition) = $-2(D_1-D_2)$

10. คำนวณค่าของตัวสถิติภาวะสารูปดีแต่ละตัวที่เกี่ยวข้อง

11. คำนวณค่าร้อยละของการจำแนกกลุ่มได้ถูกต้องจากตัวแบบสำหรับ Y แต่ละกลุ่มและ Sensitivity total

12. ทำซ้ำตั้งแต่ข้อ 4-10 จำนวน 1,000 ครั้ง

13. ทำซ้ำตั้งแต่ข้อ 2-11 โดยเพิ่มค่า β_{12} จาก 0 - 4.5 โดยเพิ่มครั้งละ 0.3

14. พลอตกราฟระหว่าง β_{12} กับ Sensitivity (%) แล้วประเมินผลการวิจัย

15. ทำซ้ำตั้งแต่ข้อ 1-13 โดยเปลี่ยนขนาดตัวอย่าง จาก 600, 800, 1,000 และ 1,500 ตามลำดับ

3. การวิเคราะห์เชิงสถิติ

การวิเคราะห์ตัวแบบ โดยการใช้ตัวสถิติต่างๆ คือ Likelihood Ratio statistic, Generalized Coefficients of Determination, BIC, AIC, Power of the tests และ PCC ซึ่งการคำนวณในการจำลองแบบใช้สูตรดังนี้

$G_M = -2\,[\ln(L_O)-\ln(L_M)]$ (The model chi-square statistic)

The Coefficients of Determination, R^2 analogs ประกอบด้วย

$$R^2_C = \frac{G_M}{(G_M + n)}$$ (The contingency coefficient R^2) (Aldrich & Nelson, 1984)

$$R^2_L = \frac{[\ln(L_O) - \ln(L_M)]}{\ln(L_O)} = 1 - \left[\frac{\ln(L_M)}{\ln(L_O)}\right]$$

(The log likelihood ratio R^2) (McFadden, 1974; Menard, 1995)

$$R^2_M = 1 - \left[\frac{L_O}{L_M}\right]^{\frac{2}{n}}$$ (The geometric mean squared improvement per observation R^2) (Cox & Snell, 1989; Maddala, 1983; Ryan, 1997)

$$R^2_N = \frac{\left[1 - (\frac{L_O}{L_M})^{\frac{2}{n}}\right]}{\left[1 - (L_O)^{\frac{2}{n}}\right]}$$ (The adjusted geometric mean squared improvement R^2)(Nagelkerke, 1991, Ryan, 1997)

AIC = G_M - 2 (Δdf), BIC = G_M- (log(n)) (Δdf), (Lawal, 2003)

POWER OF THE TESTS สอดคล้องกับการปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 ไม่จริง

PCC = แทนร้อยละของการจำแนกกลุ่มได้ถูกต้องของ Y แต่ละกลุ่มใน 1,000 ชุด ใช้คำนวณ Sensitivity ต่อไป

SENSITIVITY แทนร้อยละของการจำแนกกลุ่มได้ถูกต้องของ Y แต่ละกลุ่มด้วยตัวแบบของการวิจัยนี้

ประกอบด้วย Sen0, Sen1, Sen2 และ Sensitivity total แทน Sensitivity ของการจำแนกกลุ่มได้ถูกต้องของ Y=1, Y=2, Y=3 และ Y= total (ผลรวมของ Sen0, Sen1, Sen2) ตามลำดับ

โดยที่ n = Sample size

L_O = The likelihood function for the model containing only the intercept.

L_M = The likelihood function for the model containing all of the predictors.

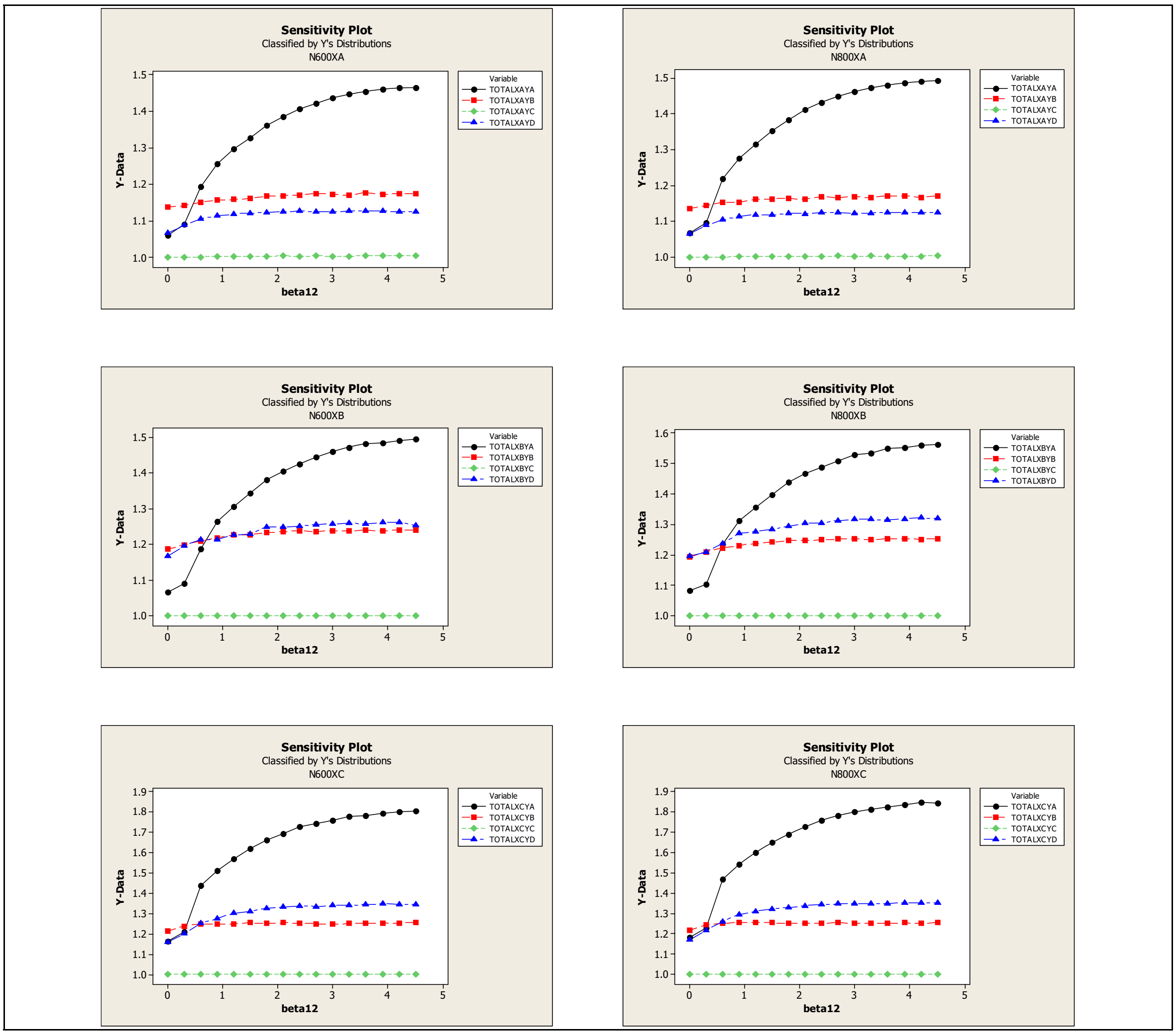
G_M = -2 [ln(L_O) - ln(L_M)] = The model chi-square statistic.

4. ผลของการวิจัย

ผลลัพธ์ของการเปรียบเทียบผลรวมของ Sensitivity ของตัวแบบสำหรับตัวแปรตอบสนอง Y ภายใต้การแจกแจงของ Y's และ (X_1, X_2) และเงื่อนไขของ β_{12} โดยใช้ขนาดตัวอย่าง 4 ขนาด คือ 600, 800, 1,000, และ 1,500 ในภาพรวมจากการเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงของ Y's ภายใต้แต่ละการแจกแจงของ (X_1, X_2) พบว่า เมื่อการแจกแจงของ Y มีสัดส่วนของแนวโน้มชัดเจนคือ Y ~ multinomial (0.05, 0.20, 0.75) ตัวแบบมี Sensitivity หรือมีการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องได้ดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของ Y's แบบอื่นๆ ที่เหลืออีก 3 แบบในทุกลักษณะการแจกแจงของ (X_1, X_2) รองลงมาเมื่อ Y's มีลักษณะการแจกแจงสมมาตร และไม่มีแนวโน้มคือ Y~ multinomial (0.33, 0.33, 0.33), (0.25, 0.50, 0.25), และ (0.55, 0.20, 0.25) ตามลำดับ โดยค่าของ Sensitivity เพิ่มขึ้นเมื่อค่าของ β_{12} และขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น (กราฟ 1-2) และผลลัพธ์ที่ได้นี้สอดคล้องกับผลลัพธ์ของการเปรียบเทียบด้วยเทอมกำลังการทดสอบ (Power of the tests, Pongsapukdee & Sukgumphaphan, 2007) ด้วย ส่วนการเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงของ (X_1, X_2)'s ภายใต้แต่ละการแจกแจงของ Y พบว่า เมื่อการแจกแจงของ (X_1, X_2) มีลักษณะสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นแบบสมมาตร คือ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) ตัวแบบมี Sensitivity การพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของ (X_1, X_2)'s แบบอื่นอีก 2 แบบ รองลงมาคือ (X_1, X_2)~ multinomial (0.50, 0.30, 0.10, 0.10) และ (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) ตามลำดับ ใน 3 ลักษณะการแจกแจงของ Y's ยกเว้นกรณีเดียวที่ Y ~ multinomial (0.55, 0.20, 0.25) ที่ตัวแบบภายใต้ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า แต่ค่าที่ได้ยังมีความแปรปรวนค่อนข้างสูง รายละเอียดเพิ่มเติมแสดงไว้ในกราฟ 1-2 ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 600 และ 800 ส่วนกราฟของขนาดตัวอย่าง 1000 และ 1500 ไม่ได้แสดงไว้ แต่ให้ผลลัพธ์อย่างมีความคงเส้นคงวา (consistency) และดีขึ้นในทำนองเดียวกัน

ผลลัพธ์ของการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของตัวสถิติ RN, BIC และ Sensitivity จำแนกตามการแจกแจงของ Y's กับ XA และ β_{12} ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 4 ขนาด พบว่า ค่าของตัวสถิติภาวะสารูปดีต่างๆ คือ Generalized Coefficients of Determination (ตัวสถิติ R^2 analogs) เพิ่มขึ้น (ซึ่งค่าสูงเป็นค่าที่ดี) ส่วนตัวสถิติ Likelihood Ratio statistic G, AIC, BIC มีค่าลดลง (ซึ่งค่าต่ำเป็นค่าที่ดี) ตามขนาดตัวอย่างและขนาดของพารามิเตอร์อิทธิพลร่วมของตัวแปรอธิบายสองตัวแปรที่เพิ่มขึ้นตามลำดับ โดยที่ค่าตัวสถิติ R^2 analogs คือ R^2_C, R^2_L, R^2_M, และ R^2_N หรือ RN ให้ผลสอดคล้องซึ่งกันและกันและสอดคล้องกับทฤษฎีสถิติเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่หรือใกล้อนันต์ (asymptotic results) ทำนองเดียวกันกับตัวสถิติ AIC และ BIC ก็ให้ผลสอดคล้องเช่นกันด้วย ดังนั้นจึงรายงานโดยสรุปผลเฉพาะค่าของตัวสถิติ RN, BIC และตัวสถิติ Sensitivity ในภาพรวมของผลลัพธ์ภายใต้การแจกแจง (X_1, X_2) ~ multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) และ Y ~ multinomial (0.55, 0.20, 0.25) ตัวสถิติส่วนใหญ่ให้ค่าภาวะสารูปดีที่สูงกว่าเมื่อ Y ~ multinomial (0.05, 0.20, 0.75), (0.25, 0.50, 0.25) และ (0.33, 0.33, 0.33) ยกเว้นตัวสถิติ RN (ตาราง 1) และยังคงมีผลลัพธ์คล้ายกันเมื่อ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.50, 0..30, 0.10, 0.10) อย่างไรก็ตาม เมื่อ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) และ Y ~ multinomial (0.33, 0.33, 0.33) ตัวสถิติภาวะสารูปดีให้ค่าสูงขึ้นกว่ากรณีข้างต้นค่อนข้างมาก โดยเฉพาะเมื่อเทอมอิทธิพลร่วมของตัวแปรอธิบายมีค่ามากขึ้น รายละเอียดเพิ่มเติมแสดงไว้ในตาราง 1 ภายใต้การแจกแจงของ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) ส่วนการแจกแจงอื่นๆ ไม่ได้แสดงไว้ แต่ให้ผลลัพธ์อย่างคงเส้นคงวาในทำนองเดียวกัน

ผลลัพธ์ : กราฟ 1

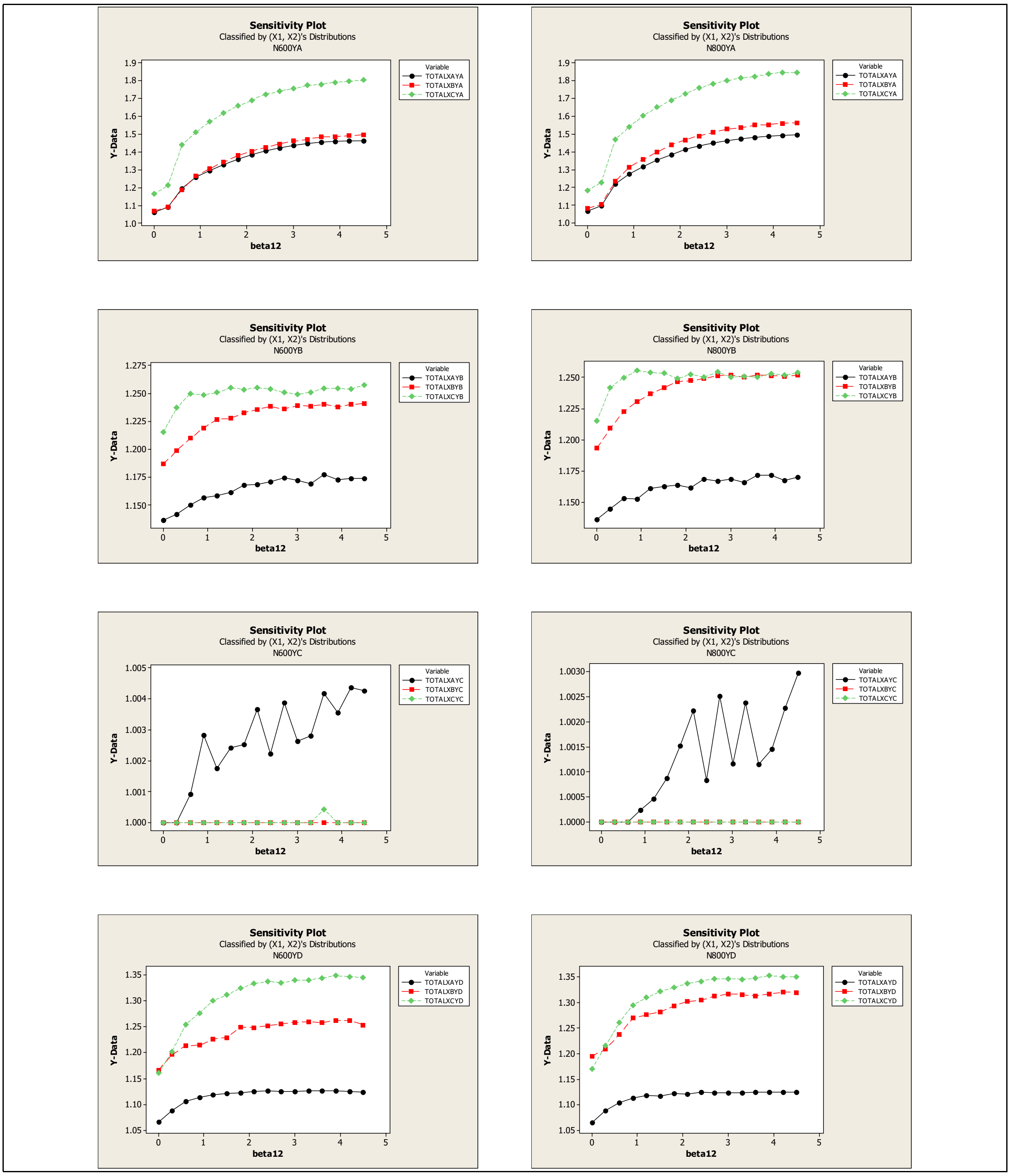


YA=Y~multinomial (0.05, 0.20, 0.75), YB=Y~multinomial (0.25, 0.50, 0.25), YC=Y~multinomial (0.5, 0.20, 0.25), YD= Y~multinomial (0.33, 0.33, 0.33)

XA=(X_1, X_2)~multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10), XB=(X_1, X_2)~ multinomial (0.50, 0.30, 0.10, 0.10), XC=(X_1, X_2)~multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)

กราฟ 1: Sensitivity Plots ของ YA, YB, YC, YD กับ β_{12} จำแนกตาม XA, XB, XC ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 600 และ 800

ผลลัพธ์ : กราฟ 2



YA=Y~multinomial (0.05, 0.20, 0.75), YB=Y~multinomial (0.25, 0.50, 0.25), YC=Y~multinomial (0.5, 0.20, 0.25), YD= Y~multinomial (0.33, 0.33, 0.33)

XA=(X_1, X_2)~multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10), XB=(X_1, X_2)~ multinomial (0.50, 0.30, 0.10, 0.10), XC=(X_1, X_2)~multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)

กราฟ 2: Sensitivity Plots ของ YA, YB, YC, YD กับ β_{12} จำแนกตาม YA, YB, YC, YD ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 600 และ 800

ตาราง 1 : ค่าเฉลี่ยของตัวสถิติ RN, BIC และ Sensitivity จำแนกตามการแจกแจงของ Y's กับ XC* และ β_{12} ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 4 ขนาด

		Y~(.05, .20, .75)			Y~(.25, .5, .25)			Y~(.55, .20, .25)			Y~(.33, .33, .33)		
	β_{12}	Rn Mean	BIC Mean	Sensitivity Mean	Rn Mean	BIC Mean	Sensitivity Mean	Rn Mean	BIC Mean	Sensitivity Mean	Rn Mean	BIC Mean	Sensitivity Mean
Sample	0.0	0.116262	1073.23	0.388	0.119802	1115.17	0.405	0.097560	871.77	0.333	0.119847	1118.68	0.387
size	2.1	0.408356	978.37	0.564	0.311012	963.17	0.418	0.189795	776.29	0.333	0.282095	961.67	0.445
600	4.5	0.584123	817.59	0.602	0.380440	906.53	0.419	0.216386	755.09	0.333	0.335963	914.03	0.448
Sample	0.0	0.124660	1430.32	0.394	0.117021	1495.08	0.405	0.099318	1167.42	0.333	0.120732	1504.52	0.390
size	2.1	0.429295	1292.72	0.575	0.311231	1287.55	0.418	0.193366	1038.69	0.333	0.276914	1307.51	0.446
800	4.5	0.608017	1059.36	0.615	0.382902	1209.89	0.418	0.220855	1011.17	0.333	0.329991	1243.65	0.450
Sample	0.0	0.113219	1810.38	0.390	0.118671	1872.84	0.407	0.102035	1438.73	0.333	0.122004	1875.77	0.388
size	2.1	0.414791	1642.97	0.566	0.305482	1626.84	0.415	0.204218	1260.43	0.333	0.288977	1603.70	0.450
1,000	4.5	0.594478	1359.05	0.603	0.375111	1532.73	0.416	0.237176	1216.43	0.333	0.345035	1520.09	0.456
Sample	0.0	0.118020	2703.23	0.393	0.122105	2814.05	0.409	0.096457	2187.08	0.333	0.115583	2823.25	0.383
size	2.1	0.420350	2452.16	0.569	0.321496	2415.86	0.419	0.194758	1933.23	0.333	0.274387	2445.30	0.448
1,500	4.5	0.599675	2024.14	0.609	0.391742	2267.54	0.421	0.223310	1873.44	0.333	0.328945	2327.39	0.452

***XC = (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)**

5. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

ผลของการวิจัยสรุปเป็น 3 ประเด็น ประเด็นแรกคือ พิจารณาการแจกแจงของ Y's ภายใต้แต่ละการแจกแจงของ (X_1, X_2) พบว่า เมื่อการแจกแจงของ Y มีสัดส่วนของแนวโน้มชัดเจนคือ Y ~ multinomial (0.05, 0.20, 0.75) ตัวแบบมี Sensitivity ของการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องได้ดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของ Y's แบบอื่นๆ ในทุกลักษณะการแจกแจงของ (X_1, X_2) รองลงมาคือ Y~ multinomial (0.33, 0.33, 0.33), (0.25, 0.50, 0.25) และ (0.55, 0.20, 0.25) ตามลำดับ โดยวัดด้วยเทอมผลรวมของ Sensitivity ของตัวแบบและเงื่อนไขของ β_{12} ภายใต้ขนาดตัวอย่าง 4 ขนาดคือ 600, 800, 1,000 และ 1,500 ซึ่งค่า Sensitivity เพิ่มขึ้นเมื่อค่าของ β_{12} และขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ประเด็นที่สองคือพิจารณาการแจกแจงของ (X_1, X_2)'s ภายใต้แต่ละการแจกแจงของ Y พบว่า เมื่อการแจกแจงของ (X_1, X_2) มีลักษณะของสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นแบบสมมาตรคือ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) ตัวแบบมี Sensitivity หรือการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องได้ดีกว่าของตัวแบบภายใต้การแจกแจงของ (X_1, X_2)'s แบบอื่นๆ อีก 2 แบบ รองลงมาคือ (X_1, X_2) ~ multinomial (0.50, 0.30, 0.10, 0.10) และ (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) ตามลำดับ ยกเว้นกรณีเดียวที่ Y ~ multinomial (0.5, 0.20, 0.25) ที่ตัวแบบภายใต้ (X_1, X_2)~ multinomial (0.10, 0.35, 0.45, 0.10) ให้ผลลัพธ์ดีกว่าอีก 2 แบบแต่ยังมีความแปรปรวนค่อนข้างสูง และประเด็นสุดท้ายคือค่าของตัวสถิติภาวะสารูปดีต่างๆ ที่ศึกษา พบว่ามีลักษณะที่ขึ้นอยู่กับลักษณะการแจกแจงของตัวแปรตอบสนองและตัวแปรอธิบาย เห็นได้ชัดจากลักษณะการแจกแจงของ Y ที่มีสัดส่วนของแนวโน้ม และของทั้ง Y และ (X_1, X_2) ที่มีสัดส่วนแบบสมมาตร ตัวแบบมี Sensitivity ของการพยากรณ์กลุ่มได้ถูกต้องดีกว่าการแจกแจงของ Y's และ (X_1, X_2)'s แบบอื่นๆ นอกจากนี้ค่าสถิติภาวะสารูปดีมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น (Generalized Coefficients of Determination) และลดลง (Likelihood Ratio statistic G, AIC, และ BIC) ตามขนาดของพารามิเตอร์อิทธิพลร่วมและขนาดตัวอย่างตามลำดับ ซึ่งทั้งหมดให้ผลลัพธ์ที่คงเส้นคงวาและสอดคล้องกับผลลัพธ์ทางทฤษฎีด้วย

ข้อเสนอแนะ

จากผลของการวิจัยข้างต้นนี้ ในการนำตัวแบบโพลิโคโทมัสโลจิทไปใช้เมื่อตัวแปรตอบสนองเชิงกลุ่มแบบมีลำดับและตัวแปรอธิบายแบบแบ่งกลุ่ม มีข้อระมัดระวังคือ ถ้าการแจกแจงของตัวแปรตอบสนองและของตัวแปรอธิบายเป็นแบบไม่สมมาตร สัดส่วนที่สนใจของตัวแปรตอบสนองมีค่าน้อยควรใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่เสมอ และเมื่อตัวแปรอธิบายไม่เป็นอิสระต่อกันการใช้ตัวแบบที่มีเทอมอิทธิพลร่วมของตัวแปรอธิบายอย่างน้อยสองตัวแปรและตัวอย่างขนาดใหญ่ เพราะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าในเทอมของผลรวมของ Sensitivity หรือการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องรวมสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป นอกจากศึกษาตัวแบบในเทอม Sensitivity หรือการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องรวมแล้ว อาจศึกษา Sensitivity หรือการพยากรณ์กลุ่มถูกต้องเฉพาะกลุ่มที่สนใจหนึ่งๆ โดยอาจเพิ่มตัวแปรอธิบายแบบอื่นในตัวแบบและอาจเพิ่มการศึกษาตัวแบบในเทอม ROC (Receiver Operating Characteristic Curve) ตลอดจนการเปรียบเทียบกับการใช้ตัวแบบอื่น อาจใช้ตัวแบบไม่เชิงเส้นตรง (Hastile & Tibshirani, 1990) เป็นทางเลือกอื่นของการวิเคราะห์ Sensitivity ของตัวแบบต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์และภาควิชาสถิติ มหาวิทยาลัยศิลปากร สำหรับทุนสนับสนุนงานวิจัยนี้ และขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทั้ง 3 ท่าน ตลอดจนคณะบรรณาธิการทุกท่าน สำหรับคำแนะนำเพิ่มเติมอันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

Agresti, A. (1990). Categorical Data Analysis. New York : John Wiley & Sons.

Agresti, A. (2002). Categorical Data Analysis. Second edition. New York : John Wiley & Sons.

Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, in second Intenational Symposium on Information Theory (eds. B.N. Petrov and F. Czake). Akademiai, Kiado, Budapest, 267-81.

Aldrich, J. H. and F. D. Nelson. (1984). Linear Probability Logit and Probit Models. Beverly Hills and London : Sage Publications.

Anderson, J. A. (1984). Regression and ordered categorical variables. *J. Roy. Statist,. B 46*, 1-30.

Aitkin, M. D. Anderson, B. Francis, and J. Hinde. (1989). Statistical Modelling in GLIM. Oxford : Clarendon Press.

Burnham, K. P., D. R. Anderson and G. C. White. (1994). Evaluation of the Kullback-Leibler discrepancy for model selection in open population capture-recapture models. *Biometric, 36,* 299-315.

Cross, P. C. and S.R. Beissinger. (2001). Using logistic regression to analyze the sensitivity of PVA models: A comparison of methods based on African Wild Dog Models. *Conservation Biology, 15*(5), 1135-1346.

Cole, S.R., P.D. Allison, and C.V. Ananth. (2004). Estimation of cummulative odds ratios. *AEP14(*3), 172-178.

Cox, D. R. and E. G. Snell. (1989). The Analysis of Binary Data. 2nd edition. London : Chapman and Hall.

Everitt, B. S. (1992). The Analysis of Contingency Tables. Second edition. London : Chapman & Hall.

Fienberg, S.E. (1980). Fisher's contributions to the analysis of categorical data. Pp.75-84 in R.A. Fisher: An application, ed. S.E. Fienberg and D.V. Hinkly. Berlin: Springer Verlag.

Goodman, L.A. (1983). The Analysis of dependence in cross-classification having ordered categories, using log-linear models for frequencies and log-linear models for odds. *Biometrics 39,* 149-160.

Hastile, T. I. and Tibshirani. (1990). Generalized Additive Models, London : Chapman and Hall.

Holbrugge W. and M. Schumacher. (1991). A comparison of regression models for the Analysis of ordered categorical data. *Apply Statistics, 40,* 249-59.

Kass, R. E. and Vaidyanathan. (1992). Approximate Bayes factors and orthogonal parameters with applications to testing equality of two binomial proportions. *J. Royal Statist., B 54,* 129-144.

Lawal, H. B. (2003). Categorical Data Analysis with SAS and SPSS Applications. London : Lawrence Erlbaum Associates. Inc.

Liao, J. G. and D. McGee. (2003). Adjusted Coefficients of Determination for Logistic Regression. *The American Statistician, 57,* 161-165.

Lipsitz, S. R., Fitzmaurice, G. M. and G. Molenberghs. (1996). Goodness-of-fit for ordinal response regression model. *Appl. Statist, 4-5(2),* 175-190.

McCarthy, M.A., M.A. Burgman, and S. Ferson. (1996). Logistic sensitivity and bounds for extinction risks. *Ecological Modellng, 86,* 297-303.

McCullagh, P. (1980). Regression models for ordinal data. *J. Royal Statis, B 42,* 109-142.

McCullagh, P and J. A. Nelder. (1989). Generalized Linear Models. London : Chapman and Hall.

McCulloch, C. E. 2000. Generalized Linear Models. *J. Of the American Statistical Association 95*(452), 1320-1324.

Maddala, G.S. (1983). Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics. Cambridge : Uni.Press.

McFadden, D. (1974). The measurement of urban travel demand. *Journal of Public Economics, 3,* 303-328.

Menard, S. (1995). Applied Logistic Regression Analysis. CA : Sage Publications.

Menard, S. (2000). Coefficients of determination for multiple logistic regression analysis. *The American Statistician, 54,* 17-24.

Molenberghs, G., M. G. Kenward, and E. Goetghebeur. (2001). Sensitivity analysis for incomplete contingency tables: The Slovenian Plebiscite Case. *Appl. Statist, 50,* 15-29.

Nagelkerke, N. J. D. (1991). Note on a general definition of the coefficient of determination. *Biometrika, 78,* 691-692.

Nelder & Wedderburn. (1972). Generalized linear models. *J. Royal Statist, A 135*(3), 370-384.

Paul, S. R. and D., Deng. (2000). Goodness of fit of generalized linear models to sparse data. *J. Royal Statist, B 62,* 323-333.

Pongsapukdee V. and T. Kumsri. (2006). Goodness-of-fit tests for logit models based on probability levels of response categories. *Thailand Statistician (4) July,* 43-61.

Pongsapukdee V. (2006). On the assessing of fit for simple and multiple logistic models with dichotomous response categories. *Silpakorn University International Journal, 6(1-2) January - December,* 145-169.

Pongsapukdee V. and S. Sukgumphaphan. (2007). Goodness-of-fit of cumulative logit models for ordinal response categories and nominal explanatory variables with two-factor interaction. *Silpakorn University Science and Technology Journal, 1(2) July - December,* 29-38.

Ryan, T. P. (1997). Modern Regression Methods. New York : John Wiley & Sons.

Saltelli, A., S. Tarantola, and F. Campolongo. (2000). Sensitivity analysis as an ingredient of modeling. *Statistical Science, 15(4),* 377-395.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimensions of a model. *Annals of Statistics, 6,* 461-464.

Shieh, G. (2001). Sample size calculations for logistic and Poisson regression models. *Biometrika, 88, 4,* 1193 - 1199.

Sukgumphaphan S. and V. Pongsapukdee (2008). Contingency-table sparseness under cumulative logit models for ordinal response categories and nominal explanatory variables with two-factor interaction. *Thailand Statistician, 6(1) January,* 27-46.

Walker. S.H. and D.B. Duncan (1967). Estimation of the probability of an event as a function of several independent variables. *Biometrika 54,* 167-179.