# วิธีการประมาณค่าแบบทำซ้ำสำหรับตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น
# The Iterative Approximation Methods for Nonlinear Operators

ระเบียน วังคีรี*
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
Rabian Wangkeeree*
Department of Mathematic, Faculty of Science, Naresuan University

## บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของบทความนี้เพื่อเป็นการศึกษาวิธีการประมาณค่าจุดตรึงของตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นโดยการใช้วิธีการประมาณค่าแบบซ้ำชนิดต่างๆ เช่น การทำซ้ำของมานน์ การทำซ้ำของอิชิคาวา และการทำซ้ำของนูร์ ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมบางอย่างสำหรับตัวพารามิเตอร์ นอกจากนั้นแล้วเรายังจะเปรียบเทียบถึงอัตราการลู่เข้าของการทำซ้ำที่ได้กล่าวมา

**คำสำคัญ :** การทำซ้ำของมานน์ การทำซ้ำของอิชิคาวา การทำซ้ำของนูร์ ปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น

## Abstract

The objective of this article is to study the fixed point approximation methods of nonlinear operators by using the iterative approximation methods, Mann iteration, Ishikawa iteration, Noor iteration, in both Hilbert spaces and Banach spaces under the appropriate conditions imposed on the parameters. Moreover, we will compare the rate of convergence of the above iterations.

**Keywords :** Mann iteration, Ishikawa iteration, Noor Iteration, Banach spaces, nonlinear operators.

*E-mail: rabianw@nu.ac.th

## บทนำ

ทฤษฎีจุดตรึง (Fixed Point Theory) นับเป็นแขนงที่สำคัญแขนงหนึ่งในสาขาของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis) ในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง ในการคิดค้นทฤษฎีเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ๆ นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อทางวิชาการ และ การพัฒนาประเทศ เป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้นนอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาและแขนงต่างๆ นั้นแล้ว บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (Basic science) อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติต่อไป

ทฤษฎีจุดตรึงนับว่าเป็นแขนงหนึ่งที่สามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อการศึกษาเกี่ยวกับ **การมีคำตอบของสมการต่างๆ** (existence of solution) และ **การมีเพียงคำตอบเดียว** ของสมการ (uniqueness of solution) ตลอดจนการคิดค้นหาวิธีในการประมาณหาคำตอบของสมการต่างๆ ดังนั้นการศึกษาทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการมีจุดตรึงของการส่งต่างๆ และ การหาระเบียบวิธีต่างๆ ที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบนั้นจึงเป็นหัวข้อที่มีนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งจำนวนมากให้ความสนใจศึกษา ค้นคว้าวิจัย จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าการศึกษาทฤษฎีจุดตรึงมีความสัมพันธ์ใกล้ชิดต่อการศึกษาสมบัติเรขาคณิตของปริภูมิบานาค ตัวอย่างเช่น สมบัติความนูนแบบเอกรูป (Uniform convexity) ของปริภูมิบานาค $X$ ทำให้ได้ว่าทุกๆ การส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) จากเซตย่อย $C$ ของ $X$ ไปยังตัวมันเอง มีจุดตรึงเสมอ โดยที่ $C$ เป็นเซตปิด เซตนูน และมีขอบเขต จากนั้นนักคณิตศาสตร์ก็ให้ความสนใจศึกษาสมบัติเรขาคณิตอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการมจุดตรึงของการส่งต่างๆ มากขึ้นตามลำดับ และเป็นปัญหาที่กำลังเป็นที่สนใจกันอย่างกว้างขวาง เมื่อศึกษาการมีคำตอบของสมการต่างๆ แล้ว ปัญหาที่น่าสนใจต่อไปก็คือ เราจะหาคำตอบของสมการต่างๆ นั้นได้อย่างไร คำถามดังกล่าวนี้ก็ทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจศึกษา คิดค้น ระเบียบวิธีการกระทำซ้ำของจุดตรึง (Fixed-point Iterations) ต่างๆ ที่ใช้ในการหาคำตอบ และ ประมาณคำตอบ เช่น ระเบียบวิธีของการกระทำซ้ำแบบมาน หรือ การกระทำซ้ำ 1 ขั้นตอน (Mann iteration or one-step iterations) การทำซ้ำแบบอิชิกาวา หรือ การกระทำซ้ำ 2 ขั้นตอน (Ishikawa iteration or two-step iterations) และ การบวนการทำซ้ำแบบนอร์ หรือ การกระทำซ้ำ 3 ขั้นตอน (Noor Iteration or three-step iteration) เพื่อนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาในเรื่องสมการตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น (nonlinear operator equations) อสมการแปรผัน (variational inequality) การวิเคราะห์ทางตัวเลข (numerical analysis) ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค นอกจากนั้นแล้วยังสามารถประยุกต์ใช้ได้กับการหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่นๆ

ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับการกระทำซ้ำของจุดตรึงดังกล่าวข้างต้น ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆที่คาดว่าจะได้รับ คือ ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ เกี่ยวการลู่เข้าของการกระทำซ้ำของจุดตรึง (Fixed point iterations) ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ที่ได้ข้างต้นนั้นจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาวิชาการในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้อง อันจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศต่อไป

## นิยามและความรู้พื้นฐาน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามและความรู้พื้นฐานที่สำคัญและจำเป็นในการศึกษาข้อปัญหาข้างต้นดังต่อไปนี้

**บทนิยาม 1** จะกล่าวว่าปริภูมิบานาค $B$ เป็น*ปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป* (uniformly convex space) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$$

สำหรับทุก $x, y \in B$ ซึ่ง $\|x\| = \|y\| = 1$ และ $\|x-y\| \geq \varepsilon$

**บทนิยาม 2** จะกล่าวว่าปริภูมิบานาค $B$ เป็น*ปริภูมิปรับเรียบแบบเอกรูป* (uniformly smooth space) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

2 $$\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} \leq 1+\varepsilon\|y\|$$

สำหรับทุก $x, y \in B$ ซึ่ง $\|x\| = 1, \|y\| \leq \delta$

**บทนิยาม 3** กำหนดให้ $X$ เป็นปริภูมินอร์ม $\varnothing \neq C \subset X$ และ $T : C \to C$ เป็นการส่งใดๆ จะกล่าวว่า $x \in C$ เป็น *จุดตรึง* (*Fixed point*) ของการส่ง $T$ ถ้า $Tx = x$ และเขียนแทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของ $T$ โดย $F(T)$ นั่นคือ $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$

**บทนิยาม 4** กำหนด $X$ เป็นปริภูมินอร์ม และ $\varnothing \neq C \subset X$ และกำหนดการส่ง $T : C \rightarrow C$ จะกล่าวว่า

(a) $T$ เป็น *การส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping)* ถ้า $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|, \forall x, y \in C$

(b) $T$ เป็น *การส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ* (asymptotically nonexpansive mapping) ถ้ามีลำดับ $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ และ

$$\|T^n x - T^n y\| \le k_n \|x - y\|, \forall x, y \in C, \forall n \in ℕ$$

(c) $T$ เป็น *การส่งแบบลิฟชิทซ์* (Lipschitz mapping) ถ้ามีจำนวนจริง $L > 0$ ซึ่ง $\|Tx - Ty\| \le L\|x - y\|, \forall x, y \in C$

จาก บทนิยาม 4 ทำให้ได้ความสัมพันธ์ของการส่งแบบต่างๆ ดังนี้ คือ ทุกๆ การส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ เป็น การส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้น

**บทนิยาม 5** ให้ $X$ เป็นปริภูมิบานาค และ $X^*$ เป็นปริภูมิคู่กัน (dual space) ของ $X$ สำหรับแต่ละ $x \in X$ ให้

$$J(x) = \left\{ f \in X^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \right\}$$

เมื่อ $\langle x, f \rangle$ หมายถึงค่าของ $f(x)$ และจะเรียกตัวดำเนินการ $J : X \rightarrow X^*$ ว่าเป็น **การส่งภาวะคู่กัน (duality mapping)** ของ $X$

**บทนิยาม 6** กำหนด $X$ เป็นปริภูมิบานาคบน ก , $J$ เป็นการส่งภาวะคู่กัน และ $T$ เป็นการส่งจาก $D(T)$ ไปยัง $X$

(a) จะกล่าวว่า $T$ เป็น *การส่งการหดเทียมอย่างเข้ม* (strongly pseudo-contractive) ถ้ามีจำนวนจริง $k > 0$ ซึ่งสำหรับทุกๆ $x, y \in D(T)$ จะมี $j \in J(x - y)$ ซึ่งทำให้

$$\langle (I-T)x - (I-T)y, j(x-y) \rangle \ge k\|x - y\|^2$$

(b) จะกล่าวว่า $T$ เป็น *การส่งการหดเทียม* (pseudo-contractive) ถ้าสำหรับทุกๆ $x, y \in D(T)$ จะมี $j \in J(x - y)$ ซึ่งทำให้ $\langle (I-T)x - (I-T)y, j(x-y) \rangle \ge 0$

## วิธีการทำซ้ำของมานน์ อีชิคาวา ฮาเพิร์น และนูร์

ต้นกำเนิดของวิธีการทำของมานน์ ได้ถูกนิยามขึ้นมาเพื่อใช้ในการหาสูตรของเมตริกโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ มานน์ (Mann, 1953) ในปี ค.ศ. 1953 ซึ่งวิธีการทำซ้ำดังกล่าวได้มีการศึกษา วิจัยเพิ่มเติมเพื่อใช้ในการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งไม่เชิงเส้นชนิดต่างๆ โดยเริ่มต้นจาก ดอตสัน (Dotson, 1970) และ เซนเตอร์และดอตสัน (Senter and Dotson, 1974) ดังทฤษฎีบท ต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 7** (Dotson, 1970) กำหนดให้ $C \neq \varnothing$ เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขตของปริภูมิฮิลเบิร์ต $X$ และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ ซึ่ง $0 < a < \alpha_n < b < 1$ สำหรับจุด $x_1 \in C$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ โดย

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n, \quad n \in ℕ \tag{1}$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่ $p \in F(T)$

ซึ่งต่อมาเพื่อเป็นเกียรติให้กับมานน์ได้เรียกการทำซ้ำแบบ (1) ว่า *การทำซ้ำแบบมานน์* นอกจากการทำซ้ำแบบมานน์จะใช้เพื่อประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายแล้ว ยังใช้เพื่อประมาณค่าจุดตรึงของการส่งไม่เชิงเส้นแบบอื่นๆ ดังนี้

**ทฤษฎีบท 8** (Berinede, 2002) กำหนดให้ $C \neq \varnothing$ เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขตของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป $X$ และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งลิฟชิทท์และการส่งการหดเทียมอย่างเข้มซึ่ง $F(T) \neq \varnothing$ สำหรับจุด $x_1 \in C$ นิยามลำดับ $\{x_n\}$ โดยสมการ (1) เมื่อ $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึง $p \in F(T)$

**ข้อสังเกต 9** จากทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้น ถ้า $T$ เป็นการส่งต่อเนื่องและลำดับที่เกิดจากวิธีการทำซ้ำของมานน์ลู่เข้าแล้วจุดลิมิตของลำดับจะเป็นจุดตรึงของ $T$ แต่ ถ้าการส่ง $T$ ไม่เป็นการส่งต่อเนื่อง และการทำซ้ำ $\{x_n\}$ นิยามดังสมการ (1) ลู่เข้าไปยังจุด $x \in C$ แล้วจะไม่สามารถยืนยันได้ว่า $x$ เป็นจุดตรึงของการส่ง $T$ หรือไม่ ดังตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ โดย $T0 = T1 = 0$ และ $Tx = 1$ สำหรับทุกๆ $0 < x < 1$ จะเห็นได้ชัดเจนว่า $F(T) = \{0\}$ กำหนดการทำซ้ำของมานน์โดย ให้ $x_1 \in (0, 1)$ และ

$$x_{n+1} = (1 - \frac{1}{n}) T x_n + \frac{1}{n} x_n, \quad n \in ℕ \tag{2}$$

ดังนั้นจะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (2) ลู่เข้าสู่ 1 แต่ $1 \notin F(T)$

จะพบว่าลำดับที่เกิดจากวิธีการทำซ้ำของมานน์จะลู่เข้าสู่จุดตรึงในกรณีที่ $T$ เป็นการส่งลิฟชิทท์และการส่งการหดเทียม

อย่างเข้ม อย่างไรก็ตามถ้า $T$ เป็นการส่งการหดเทียมแล้วลำดับที่เกิดจากวิธีการทำซ้ำของมานน์อาจจะไม่ลู่เข้าสู่จุดตรึงของการส่ง $T$ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะประมาณจุดตรึงของ $T$ ด้วยลำดับที่เกิดการทำซ้ำแบบอื่นๆ เป็นผลให้ต่อมา วิธีการทำซ้ำแบบอิชิคาวา (Ishikawa Iteration) ได้ถูกนำเสนอโดยอีชิคาวา (Ishikawa, 1974) เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการที่จะประมาณค่าหาจุดตรึงของการส่งลิฟชิทท์ และ การส่งการหดตัวเทียม ทั้งนี้เพราะว่าในกรณี $T$ เป็นแค่การส่งการหดตัวเทียม วิธีการทำซ้ำแบบอิชิคาวาสามารถทำให้ลำดับที่เกิดขึ้นลู่เข้าไปยังจุดตรึงของ $T$ ได้ โดยเราจะเริ่มต้นจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 10** (Ishikawa, 1974) กำหนด ให้ $C$ เป็นเซตย่อยกระชับและคอนเวกซ์ของปริภูมิฮิลเบิร์ต $H$ ให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งลิฟชิทท์และการส่งการหดตัวเทียม และให้ $x_1 \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามโดย

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T((1-\beta_n)x_n + \beta_n x_n), \qquad (3)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจำนวนจริงบวกซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $0 \le \alpha_n \le \beta_n \le 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึง $p \in F(T)$

และต่อมา ชิดูมี (Chidume, 1998) ได้ขยายทฤษฎีบทดังกล่าวจากปริภูมิฮิลเบิร์ต เป็นปริภูมิบานาคปรับเรียบเอกรูป (uniformly smooth Banach space) และได้กำหนดให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งการหดตัวเทียมอย่างดังนี้

**ทฤษฎีบท 11** (Chidume, 1998) กำหนด ให้ $C$ เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ และมีขอบเขตของปริภูมิบานาคปรับเรียบเอกรูป $H$ ให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งการหดตัวเทียมอย่างเข้ม และให้ $x_1 \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามโดยสมการ (3) เมื่อ $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจำนวนจริงบวกซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $0 \le \alpha_n, \beta_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \beta_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึง $p \in F(T)$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1991 ชู (Schu, 1991) ได้ปรับวิธีการทำซ้ำของมานน์เพื่อประมาณค่าของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับดังนี้

**ทฤษฎีบท 12** (Schu, 1991) กำหนด ให้ $C$ เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์และมีขอบเขตของปริภูมิฮิลเบิร์ต $H$ ให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งต่อเนื่องแบบบริบูรณ์ และเป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับซึ่งมีลำดับ $\{k_n\} \subseteq [0,1]$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n^2 - 1) < \infty$ และกำหนด $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ ซึ่ง $0 < \varepsilon < \alpha_n < 1-\varepsilon < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0,\ 1)$ ให้ $x_1 \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามโดยสมการ

$$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1-\alpha_n)x_n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (4)$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึง $p \in F(T)$

นอกจากนั้นแล้ว ชูร์ (Schu, 1991) ยังได้ปรับปรุงวิธีการทำซ้ำแบบอิชิคาวาเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการที่จะประมาณค่าหาจุดตรึงของการส่งแบบการหดตัวเทียมเชิงเส้นกำกับ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 13** (Schu, 1991) กำหนด ให้ $C$ เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต $H$ ให้ $T : C \to C$ เป็นการส่งการหดตัวเทียมเชิงเส้นกำกับ ต่อเนื่องอย่างบริบูรณ์ และเป็นแบบลิฟชิทท์ซึ่งมี $L$ เป็นค่าคงตัวลิฟชิทท์และมีลำดับ $\{k_n\} \subseteq [1,\infty]$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}((2k_n - 1)^2 - 1) < \infty$ และกำหนด $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset [0,\ 1)$ ซึ่ง $0 < \varepsilon < \alpha_n \le \beta_n < b, \ \forall n \in \mathbb{N}$ สำหรับบาง $\varepsilon \in (0,\ 1)$ และบาง $b \in (0, \quad L^{-2}[(1+L^2)^{\frac{1}{2}} - 1])$ ให้ $x_1 \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามโดยสมการ

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T^n((1-\beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n), \qquad (5)$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึง $p \in F(T)$

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะพบว่าลำดับที่เกิดจากวิธีการทำซ้ำของมานน์จะลู่เข้าอย่างอ่อนสู่จุดตรึงของการส่ง $T$ ถึงแม้ $X$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งเป็นผลให้ต่อมา ฮาเพิร์น (Halpern, 1967) ได้นิยามลำดับของ $\{x_n\}$ ในเซตย่อยและคอนเวกซ์ $C$ ของปริภูมิฮิลเบิร์ต $H$ โดยให้ $x_1 = u \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามโดยสมการ

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 1 \tag{6}$$

เมื่อ $T : C \rightarrow C$ และ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับในช่วงปิด $[0, 1]$ และฮาเพิร์นได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (6) จะลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึงของการส่ง $T$ ถ้า $T$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายและ $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty$ หรือ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) = 1$

ซึ่งต่อมาทฤษฎีบทดังกล่าวก็ได้ถูกขยายไปยังปริภูมิบานาคปรับเรียบเอกรูปโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ ซู ในปี ค.ศ. 1996 (Xu, 1996) และยิ่งไปกว่านั้นในปี 2000 นูร์ (Noor, 2000) ได้เสนอวิธีการทำซ้ำสามขั้นซึ่งต่อมาภายหลังได้เรียกว่า *การทำซ้ำของนูร์* (Noor Iteration) สำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของอสมการแปรผัน (Variational inequality) และ การเป็นเซตย่อยเชิงการแปรผัน (variational inclusions) ในปริภูมิฮิลเบิร์ตซึ่งพบว่าการทำซ้ำสามขั้นนั้นจะให้อัตราการลู่เข้า (rate of convergence) สู่คำตอบของอสมการดังกล่าวได้เร็วกว่า การทำซ้ำของมานน์ และการทำซ้ำของอิชิคาวา ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้น ต่อมาในปี 2002 นูร์ (Noor, 2002) ได้ประยุกต์การทำซ้ำสามขั้นตอนเพื่อใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับดังรายละเอียดต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 14** (Noor, 2002) กำหนด ให้ $C$ เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ และมีขอบเขตของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป $X$ ให้ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่ต่อเนื่องอย่างบริบูรณ์ซึ่งมีลำดับ $\{k_n\} \subseteq [1, \infty]$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ และกำหนด $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0, 1]$ ซึ่ง $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$ ให้ $x_1 = \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามโดยสมการ

$$z_n = \gamma_n T^n x_n + (1-\gamma_n)x_n,$$
$$y_n = \beta_n T^n z_n + (1-\beta_n)x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1-\alpha_n)x_n, \quad \forall n \in ฅ$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่จุดตรึง $p \in F(T)$

## สรุป

การทำซ้ำของมานน์ และการทำซ้ำของอิชิคาวา และการทำซ้ำของนูร์ ได้ถูกคิดค้นขึ้นมาเพื่อเป็นเครื่องในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งไม่เชิงเส้นแบบต่างๆ ในทั้งปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค นอกจากนั้นแล้วยังเป็นเครื่องมือในการที่จะค้นหาผลเฉลยของอสมการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ตัวอย่างเช่น อสมการการแปรผัน และ การเป็นเซตย่อยเชิงการแปรผัน จากการศึกษาพบว่า การทำซ้ำของนูร์จะมีอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของอสมการดังกล่าว หรือจุดตรึงของการส่งแบบต่างๆ ได้เร็วกว่า การทำซ้ำของมานน์ การทำซ้ำของอิชิคาวา และการทำซ้ำของฮาเพิร์น อีกทั้งยังใช้เงื่อนไขการลู่เข้าที่อ่อนกว่า เพราะฉะนั้นการพัฒนาในเรื่องของการทำซ้ำแบบต่างๆ จึงเป็นสิ่งที่นักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาต้องคิดค้นต่อไป เพื่อให้เกิดแนวทางในการแก้ไขปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้มากยิ่งขึ้น

## เอกสารอ้างอิง


Berinde. V. (2002). Iterative approximation of fixed points, Efermeride, Baia Mare, 2002.

Doston, W. G. (1970). On the Mann iterative Process. Transactions of the *American Math*ematical Society. 149, 65-73.

Halpern, B.(1967). Fixed points of non-Expanding mappings, *Bulletin of American Math*ematical Society. *73*, 957-961.

Ishikawa, S. (1974). Fixed point by a new iterations, Proceeding of the *American Math*ematical Society. 44, 147-150.

Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iterations, Proceeding of the *American Math*ematical Society. 4, 506-510.

Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 251*, 217-229.

Schu, J. (1991). Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 183*, 403-407.

Senter, H. F. and Dotson, W. G.(1974). Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proceeding of the American Mathematical Society. 44, 375-380.

Xu, H. K. (2002). Iterative algorithms for nonlinear operators. *Journal of the London Mathematical Society. 66*, 240-256.

Xu, B. L. and Noor, M. A. (2002). Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 267*, 444-453.