สมบัติทางเรขาคณิตในปริภูมิบานาคและจุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยายหลายค่า
Geometric Properties in Banach Spaces and Fixed Points for Multivalued Nonexpansive Mappings

บัญชา ปัญญานาค*
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Bancha Panyanak*
Department of Mathematic, Faculty of Science, Ciangmai University

บทคัดย่อ

สมบัติทางเรขาคณิตในปริภูมิบานาคนับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมากต่อการศึกษาทฤษฎีจุดตรึง ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยายหลายค่าจึงถูกสร้างขึ้นภายใต้เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับสมบัติต่างๆ เหล่านั้น

คำสำคัญ : สมบัติทางเรขาคณิต ปริภูมิบานาค จุดตรึง การส่งไม่ขยายหลายค่า

Abstract

Geometric properties in Banach spaces play important role in the metric fixed point theory. Fixed point theorems for multivalued nonexpansive mappings were constructed under some conditions involving such properties.

Keywords : geometric properties, Banach spaces, fixed points, multivalued nonexpansive mappings

*E-mail: banchap@chiangmai.ac.th

1. บทนำ

ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ทั้งแบบค่าเดียวและแบบหลายค่า มีความสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตัวอย่างเช่น ทฤษฎีตัวดำเนินการ (operator theory) ทฤษฎีการควบคุม (control theory) ทฤษฎีสมการ (theory of equation) ทฤษฎีเกม (game theory) เป็นต้น แต่ปัญหาที่พบส่วนใหญ่โดยเฉพาะปัญหาในทางเศรษฐศาสตร์มักอยู่ในรูปของการส่งหลายค่า ดังนั้นจึงมีนักคณิตศาสตร์จำนวนไม่น้อยสนใจที่จะขยายทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งค่าเดียวไปยังการส่งหลายค่าโดยนักคณิตศาสตร์ในยุคแรกๆ ที่สร้างผลงานไว้มีดังนี้ ในปี ค.ศ. 1941 Kakutani ได้ขยายทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องบนบอลปิดหนึ่งหน่วยของ $\mathbb{R}^n$ (Brouwer, 1912) ไปยังการส่งหลายค่า ต่อมาในปี ค.ศ. 1950 Bohnenblust และ Karlin ได้ขยายทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตนูน (convex) กระชับ (compact) ของปริภูมิบานาค (Schauder, 1930) ไปยังการส่งหลายค่า และในปี ค.ศ. 1969 Nadler ได้ขยายหลักการหดตัวของบานาค (Banach contraction principle) (Banach, 1922) ไปยังการส่งหดตัวหลายค่า หลังจากนั้นเป็นต้นมาได้มีผู้ให้ความสนใจสร้างทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่ากันอย่างแพร่หลายรวมถึงผู้เขียนด้วยจนเกิดทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าขึ้นเป็นจำนวนมากและมีการพัฒนาเรื่อยมาจนถึงปัจจุบัน อย่างไรก็ตามยังมีปัญหาอีกจำนวนไม่น้อยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าที่ยังคงต้องการคำตอบ จุดประสงค์ของบทความฉบับนี้คือต้องการให้ผู้อ่านทราบถึงเรื่องราวความเป็นมาของทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าและสิ่งต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนปัญหาเปิดที่น่าสนใจเพื่อนำไปเป็นแนวทางในการทำวิจัยเกี่ยวกับเรื่องนี้ต่อไป

2. สมบัติทางเรขาคณิตในปริภูมิบานาค

ปัญหาที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจคือ เงื่อนไขอะไรบนปริภูมิบานาค X ที่เพียงพอต่อการมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า (ดูความหมายของสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าได้ในนิยาม 3.1) สมบัติทางเรขาคณิต (geometric property) และค่าคงที่ทางเรขาคณิต (geometric constant) ของปริภูมิบานาคนับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมากต่อการมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

นิยาม 2.1. (Kirk, 1965) ปริภูมิบานาค X จะเรียกว่ามีโครงสร้างปรกติ (normal structure) เขียนย่อๆ ว่า NS ถ้าสำหรับทุกๆ เซตย่อย C ของ X ที่เป็นเซตนูน (convex) ปิด (closed) และมีขอบเขต (bounded) ซึ่ง $\operatorname{diam}(C) > 0$ จะมี x ใน C ซึ่ง

$$r_x(C) := \sup\{\|x-y\| : y \in C\} < \operatorname{diam}(C) \qquad \text{.................(*)}$$

โดยที่ $\operatorname{diam}(C)$ คือเส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter) ของเซต C ซึ่งนิยามโดย $\operatorname{diam}(C) := \sup\{\|x-y\| : x, y \in C\}$

หมายเหตุ ถ้า (*) เป็นจริงสำหรับทุกๆ เซตย่อย C ของ X ที่เป็นเซตนูน และกระชับอย่างอ่อน (weakly compact) แล้วจะเรียก X ว่ามีโครงสร้างปรกติอย่างอ่อน (weak normal structure) เขียนย่อๆ ว่า w-NS

ในปี ค.ศ. 1980 Bynum ได้ให้นิยามสัมประสิทธิ์ของปริภูมิบานาคที่สัมพันธ์กับโครงสร้างปรกติและโครงสร้างปรกติอย่างอ่อน ดังนี้

นิยาม 2.2. กำหนดให้ $N(X)$ แทนสัมประสิทธิ์โครงสร้างปรกติ (normal structure coefficient) ของปริภูมิบานาค X ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$N(X) := \inf\left\{ \frac{\operatorname{diam}(A)}{r(A)} : A \text{ เป็นเซตย่อยนูน ปิด และมีขอบเขตของ } X \text{ ซึ่ง } \operatorname{diam}(A) > 0 \right\}$$

โดยที่ $r(A)$ คือรัศมีเชบบีเชฟ (chebyshev radius) ของ A ซึ่งนิยามโดย $r(A) := \inf\{\sup\{\|x-y\| : y \in A\} : x \in A\}$

นิยาม 2.3. กำหนดให้ $WCS(X)$ แทนสัมประสิทธิ์ลำดับลู่เข้าอย่างอ่อน (weakly convergent sequence coefficient) ของปริภูมิบานาค X ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$WCS(X) := \inf\left\{ \frac{\operatorname{diam}_a(\{x_n\})}{r_a(\{x_n\})} : \{x_n\} \text{ เป็นลำดับที่ลู่เข้าอย่างอ่อน แต่ไม่ลู่เข้าอย่างเข้าอย่างเข้ม} \right\}$$

โดยที่ $\operatorname{diam}_a(\{x_n\})$ คือเส้นผ่านศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ (asymptotic diameter) ของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย $\operatorname{diam}_a(\{x_n\}) := \limsup_{k\to\infty} \{\|x_n - x_m\| : n, m \geq k\}$ และ $r_a(\{x_n\})$ คือรัศมีเชิงเส้นกำกับ (asymptotic radius) ของ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย

$$r_a(\{x_n\}) := \inf\{\limsup_n \|x_n - x\| : x \in \operatorname{co}(\{x_n\})\}$$

เราจะเรียกปริภูมิบานาค X ว่ามีโครงสร้างปรกติเอกรูป (uniform normal structure) เขียนย่อๆ ว่า UNS ถ้า $N(X)>1$ และจะกล่าวว่า X มีโครงสร้างปรกติเอกรูปอย่างอ่อน (weak uniform normal structure) เขียนย่อๆ ว่า w-UNS ถ้า $WCS(X)>1$

ข้อสังเกต จากนิยามข้างต้นจะเห็นได้ว่าสำหรับทุกๆ ปริภูมิบานาค X ค่าของ $WCS(X)$ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่า $N(X)$ เสมอ ผลลัพธ์นี้ทำให้เราได้ข้อสรุปว่า ถ้า X มีโครงสร้างปรกติเอกรูปแล้ว X จะมีโครงสร้างปรกติเอกรูปอย่างอ่อน

จากการศึกษาพบว่าสมบัติทางเรขาคณิตของปริภูมิบานาค X ที่ทำให้ X มีโครงสร้างปรกติเอกรูปหรือโครงสร้างปรกติเอกรูปอย่างอ่อนมักจะส่งผลให้ X มีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า ต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงสมบัติต่างๆ เหล่านั้น

นิยาม 2.4. (Opial, 1967) เราจะเรียกปริภูมิบานาค X ว่ามีสมบัติโอเปียล (Opial property) ถ้าสำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่งลู่เข้าอย่างอ่อนสู่เวกเตอร์ศูนย์ (เขียนแทนด้วย $x_n \xrightarrow{w} 0$) และสำหรับ $x \neq 0$ ใน X จะได้ว่า $\liminf_n \| x_n \| < \liminf_n \| x_n + x \|$ สำหรับแต่ละ $c \geq 0$ กำหนดให้ $r_x(c)$ แทนโอเปียลโมดูลัส (Opial modulus) ของ X นิยามโดย

$$r_X(c) := \inf\left\{ \liminf_n \| x_n + x \| - 1 : \| x \| \geq c, x_n \xrightarrow{w} 0, \liminf_n \| x_n \| \geq 1 \right\}$$

เราจะกล่าวว่า X มีสมบัติโอเปียลเอกรูป (uniform Opial property) ถ้า $r_x(c) > 0$ สำหรับทุกๆ $c > 0$

ในปี ค.ศ. 1972 Gossez และ Lami Dozo ได้พิสูจน์ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคที่มีสมบัติโอเปียลจะมีโครงสร้างปรกติอย่างอ่อน ต่อมา Lin และคณะ (Lin et al., 1995) ได้พิสูจน์ว่าสำหรับทุกๆ ปริภูมิบานาค X จะได้ว่า $WCS(X)>1 + r_x(c)$ จากผลลัพธ์นี้ทำให้สามารถสรุปได้ว่าถ้า $r_x(1) > 0$ แล้ว X จะมีโครงสร้างปรกติเอกรูปอย่างอ่อน

ต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงความนูน (convexity) ของปริภูมิบานาค

นิยาม 2.5. เราจะเรียกปริภูมิบานาค X ว่าเป็นปริภูมินูนเอกรูป (uniformly convex) เขียนย่อๆ ว่า UC ถ้า

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf\left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B_X, \| x - y \| \geq \varepsilon \right\} > 0$$

สำหรับทุกๆ $\varepsilon \in [0, 2]$ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

$$\varepsilon_0(X) := \sup\{ \varepsilon \geq 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0 \} = 0$$

เราเรียก $\delta_X(\varepsilon)$ ว่าโมดูลัสของความนูน (modulus of convexity) ของ X และเรียก $\varepsilon_0(X)$ ว่าค่าลักษณะเฉพาะของความนูน (characteristic of convexity) ของ X โดยที่ B_X คือบอลปิดหนึ่งหน่วย (closed unit ball) ของ X ซึ่งนิยามโดย $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ และเราจะเรียก X ว่าเป็นปริภูมิไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูป (uniformly nonsquare) ถ้า $\varepsilon_0(X) < 2$

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของความนูนและสัมประสิทธิ์โครงสร้างปรกติในปริภูมิบานาค X คือ $\frac{1}{1-\delta_X(1)} \leq N(X)$ จากผลลัพธ์นี้ทำให้สามารถสรุปได้ว่าถ้า $\delta_X(1) > 0$ แล้ว X จะเป็นปริภูมิสะท้อน (reflexive space) และมีโครงสร้างปรกติเอกรูป

ในปี ค.ศ. 1980 Huff ได้นิยามปริภูมิเกือบนูนเอกรูปซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) ของปริภูมินูนเอกรูปดังนี้

นิยาม 2.6. ปริภูมิบานาค X จะเรียกว่าเป็นปริภูมิเกือบนูนเอกรูป (nearly uniformly convex) เขียนย่อๆ ว่า NUC ถ้า X เป็นปริภูมิสะท้อนและสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ใน B_X ซึ่ง $x_n \xrightarrow{w} x$ และ $\mathrm{sep}(\{x_n\}) := \inf\{\| x_n - x_m \| : n \neq m\} \geq \varepsilon$ จะได้ว่า $\| x \| \leq 1 - \delta$

ต่อไปจะกล่าวถึงตัววัดความไม่กระชับ (measure of noncompactness) ที่มีความสัมพันธ์กับปริภูมิเกือบนูนเอกรูป นั่นคือ ตัววัดความไม่กระชับการแยก (separation measure of noncompactness) ซึ่งตัววัดความไม่กระชับชนิดนี้มีบทบาทสำคัญอย่างมากต่อการศึกษาทฤษฎีจุดตรึงในปริภูมิบานาค สำหรับตัววัดความไม่กระชับชนิดอื่นๆ ผู้อ่านสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้ใน (Ayerbe et al., 1997)

นิยาม 2.7. ให้ A เป็นเซตย่อยที่มีขอบเขตของปริภูมิบานาค X กำหนดให้ $\beta(A)$ แทนตัววัดความไม่กระชับการแยกซึ่งนิยามโดย

$$\beta(A) := \sup\{ \varepsilon > 0 : \exists \{x_n\} \subset A, \mathrm{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon \}$$

และเรากำหนดให้ $\Delta_{X,\beta}(\varepsilon)$ แทนโมดูลัสของความนูนไม่กระชับ (modulus of noncompact convexity) เทียบกับ β ซึ่งนิยามโดย $\Delta_{X,\beta}(\varepsilon) := \inf\{1 - d(0, A) : A$ เป็นเซตย่อยนูนของ $B_X, \beta(A) > \varepsilon\} > 0$

และกำหนดให้ $\varepsilon_\beta(X)$ แทนค่าลักษณะเฉพาะของความนูนไม่กระชับ (characteristic of noncompact convexity) ซึ่งนิยามโดย

$$\varepsilon_\beta(X) := \sup\{ \varepsilon \geq 0 : \Delta_{X,\beta}(\varepsilon) = 0 \}$$

Ayerbe และคณะ (Ayerbe et al., 1997) ได้พิสูจน์ว่า ปริภูมิบานาค X จะเป็น NUC ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon_\beta(X) = 0$ นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์อีกว่า ถ้า $\varepsilon_\beta(X) < 1$ แล้ว X จะเป็นปริภูมิสะท้อนและมีโครงสร้างปกติอย่างอ่อน

ต่อไปจะเป็นการให้นิยามของปริภูมิปรับเรียบเอกรูปดังนี้

นิยาม 2.8. ปริภูมิบานาค X จะเรียกว่าปริภูมิเรียบแบบเอกรูป (uniformly smooth) เขียนย่อๆ ว่า US ถ้า

$$\rho'_X(0) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0$$

เมื่อ ρ_X คือ โมดูลัสของความเรียบ (modulus of smoothness) ของ X ซึ่งนิยามโดย

$$\rho_X(t) := \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+ty\| + \|x-ty\|) - 1 : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\right\}$$

สำหรับทุกๆ $t \geq 0$

Prus (Prus, 1991) ได้พิสูจน์ว่าถ้า $\rho'_X(0) < \frac{1}{2}$ แล้ว X เป็นปริภูมิสะท้อนและมีโครงสร้างปรกติเอกรูป

ต่อไปจะกล่าวถึงโมดูลัสของความเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งนิยามโดย Benitez และคณะ (Benitez et al., 1998) ดังนี้

นิยาม 2.9. ให้ X เป็นปริภูมิบานาค สำหรับแต่ละ $\beta \in [0, 1)$ เรานิยามโมดูลัสของความเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส (modulus of squareness) โดย $\xi_X(\beta) := \sup_{v,w\in S_X} \frac{\|v-\beta w\|}{1-\beta N_+(v,w)}$

เมื่อ $N_+(v,w) := \lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{\|v+\lambda w\| - \|v\|}{\lambda}$

ต่อไปจะกล่าวถึงค่าคงที่ในปริภูมิบานาค X ที่สำคัญคือ ค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ (Jordan-von Neumann constant) ซึ่งนิยามโดย Clarkson (Clarkson, 1937) ดังนี้

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} : x, y \in X, (x,y) \neq (0,0)\right\}$$

สุดท้ายนี้จะกล่าวถึงค่าคงที่เจมส์ (James constant) ซึ่งนิยามโดย Gao และ Lau (Gao & Lau, 1990) ดังนี้

$$J(X) = \sup\{\min(\|x+y\|, \|x-y\|) : x, y \in B_X\}$$

สมบัติเบื้องต้นของค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์และค่าคงที่เจมส์เป็นดังนี้

(1) $1 \le C_{NJ}(X) \le 2$ (Clarkson, 1937)

(2) $\sqrt{2} \le J(X) \le 2$ (Gao & Lau, 1990)

(3) $\frac{1}{2}J(X)^2 \le C_{NJ}(X) \le \frac{J(X)^2}{(J(X)-1)^2+1}$ (Kato et al., 2001)

(4) $C_{NJ}(X) < 2 \Leftrightarrow J(X) < 2 \Leftrightarrow X$ เป็นปริภูมิไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูป (Mazcunan-Navarro, 2003)

3. จุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยายหลายค่า

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามและความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับจุดตรึงของการส่งไม่ขยายหลายค่า วิวัฒนาการของการเกิดทฤษฎีบทต่างๆ ตลอดจนปัญหาเปิดเกี่ยวกับเรื่องนี้

นิยาม 3.1. ให้ C เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค เราใช้สัญลักษณ์ $K(C)$ แทนวงศ์ (family) ของเซตย่อยกระชับของ C และ $KC(C)$ แทนวงศ์ของเซตย่อยนูนกระชับของ C

เราจะเรียกการส่งหลายค่า $T : C \to K(C)$ ว่าการส่งไม่ขยายถ้า $H(Tx, Ty) \le \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ เมื่อ $H(\cdot\ , \cdot)$ คือเมตริกเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff metric) ซึ่งนิยามโดย

$H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}$ โดยที่ $A, B \in K(C)$

เราจะกล่าวว่าการส่ง T มีจุดตรึง (fixed point) ถ้ามีสมาชิก $x \in C$ ที่ $x \in Tx$ นอกจากนี้เราจะกล่าวว่าปริภูมิบานาค X มีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า (เขียนย่อๆ ว่า MFPP) ถ้าทุกการส่งไม่ขยายหลายค่า $T : C \to KC(C)$ มีจุดตรึงโดยที่ C เป็นเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขตของ X และจะกล่าวว่า X มีสมบัติจุดตรึงอย่างอ่อนสำหรับการส่งหลายค่า (เขียนย่อๆ ว่า w-MFPP) ถ้าทุกการส่งไม่ขยายหลายค่า $T : C \to KC(C)$ มีจุดตรึงโดยที่ C เป็นเซตย่อยนูน และกระชับอย่างอ่อนของ X เช่นเดียวกันกับการส่งค่าเดียว MFPP และ w-MFPP ถือว่าเป็นสิ่งเดียวกันในปริภูมิบานาคสะท้อน

ในปี ค.ศ. 1973 Lami Dozo ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2. ให้ X เป็นปริภูมิบานาคที่มีสมบัติโอเปียล และให้ C เป็นเซตย่อยนูน และกระชับอย่างอ่อนของ X และให้ $T : C \to K(C)$ เป็นการส่งไม่ขยายหลายค่า จะได้ว่า T มีจุดตรึงใน C

ในปี ค.ศ. 1974 Lim ได้พิสูจน์ผลลัพธ์ลักษณะเดียวกันในปริภูมิบานาคนูนเอกรูปดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3. ให้ X เป็นปริภูมิบานาคนูนเอกรูป และให้ C เป็นเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขตของ X และให้ $T : C \to K(C)$ เป็นการส่งไม่ขยายหลายค่า จะได้ว่า T มีจุดตรึงใน C

ในการศึกษาทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งไม่ขยายหลายค่าจำเป็นจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับรัศมีเชิงเส้นกำกับ (asymptotic radius) และศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ (asymptotic center) ของลำดับที่มีขอบเขตซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

นิยาม 3.4. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด นูน ของปริภูมิบานาค X เราจะใช้สัญลักษณ์ $r(C, \{x_n\})$ แทนรัศมีเชิงเส้นกำกับของ $\{x_n\}$ เทียบกับ C ซึ่งนิยามโดย

$$r(C,\{x_n\}) := \inf\left\{\limsup_n \| x_n - x \| : x \in C\right\}$$

และเราจะใช้สัญลักษณ์ $A(C, \{x_n\})$ แทนศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของ $\{x_n\}$ เทียบกับ C ซึ่งนิยามโดย

$$A(C,\{x_n\}) := \left\{x \in C : \limsup_n \| x_n - x \| = r(C,\{x_n\})\right\}$$

นอกจากนี้เรานิยาม รัศมีเชบบีเชฟ (chebyshev radius) สำหรับเซตย่อย A ของ X เทียบกับ C ดังนี้

$$r_C(A) := \inf\{\sup\{\| x - y \| : y \in A\} : x \in C\}$$

ต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงลำดับปรกติและลำดับเชิงเส้นกำกับเอกรูป

นิยาม 3.5. เราจะเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ว่าเป็นลำดับปรกติ (regular) เทียบกับเซต C ถ้า $r(C, \{x_n\}) = r(C, \{x_{nk}\})$ สำหรับทุกๆ ลำดับย่อย $\{x_{nk}\}$ ของ $\{x_n\}$ และจะเรียก $\{x_n\}$ ว่าเป็นลำดับเชิงเส้นกำกับเอกรูปเทียบกับเซต C ถ้า $A(C, \{x_n\}) = A(C, \{x_{nk}\})$ สำหรับทุกๆ ลำดับย่อย $\{x_{nk}\}$ ของ $\{x_n\}$

ในปี ค.ศ. 1990 Kirk และ Massa ได้ขยายผลลัพธ์ของ Lim (Lim, 1974) ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.6. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขตของปริภูมิบานาค X และ $T : C \to KC(C)$ เป็นการส่งไม่ขยายหลายค่า สมมติว่าทุกๆ ศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ (asymptotic center) ใน C ของลำดับที่มีขอบเขตของ X เป็นเซตกระชับ แล้วจะได้ว่า T มีจุดตรึงใน C

ในปี ค.ศ. 1986 Kirk ได้พิสูจน์ว่า ถ้า X เป็นปริภูมินูนเอกรูป แล้วทุกๆ ศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตใน X จะเป็นเซตกระชับ อย่างไรก็ตามทฤษฎีบท 3.6 ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับปริภูมิเกือบนูนเอกรูปเนื่องจาก Kuczumow และ Prus (Kuczumow & Prus, 1990) ได้ยกตัวอย่างของศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับในปริภูมิเกือบนูนเอกรูปที่ไม่เป็นเซตกระชับจึงเกิดปัญหาเปิดขึ้นซึ่งปรากฏใน (Xu, 2000) ดังนี้

ปัญหา 3.7. ปริภูมิเกือบนูนเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าหรือไม่

นอกจากนี้ Xu ยังได้ตั้งปัญหาที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือ

ปัญหา 3.8. ปริภูมิเรียบแบบเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าหรือไม่

ในปี ค.ศ. 2003 Dominguez และ Lorenzo ได้สร้างความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีเชบบีเชฟและศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตและตัววัดความไม่กระชับการแยก β ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.9. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด นูน ของปริภูมิบานาคสะท้อน X ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน C ซึ่งเป็นปรกติ (regular) เทียบกับ C แล้ว

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \le (1 - \Delta_{X,\beta}(1^-)) r(C,\{x_n\})$$

โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 3.9 Dominguez และ Lorenzo (Dominguez & Lorenzo, 2004) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.10. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขตของปริภูมิบานาค X ซึ่งมี $\varepsilon_\beta(X) < 1$ และให้ $T : C \to KC(C)$ เป็นการส่งไม่ขยายหลายค่า จะได้ว่า T มีจุดตรึงใน C

จากผลลัพธ์นี้ทำให้สามารถสรุปได้ว่าทุกๆ ปริภูมิเกือบนูนเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า (เพราะว่าถ้า X เป็น NUC แล้ว $\varepsilon_\beta(X) = 0$) ซึ่งเป็นการตอบคำถามของปัญหา 3.7 ว่าเป็นจริง

ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 Dhompongsa และคณะ (Dhompongsa et al., 2006) ให้ข้อสังเกตว่าเครื่องมือหลักที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.9 และ 3.10 คือความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีเชบบีเชฟและศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตกับรัศมีเชิงเส้นกำกับของลำดับนั้นๆ และได้นิยามเงื่อนไขบนปริภูมิบานาคขึ้นมาใหม่และเพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ที่ทำให้เกิดแนวคิดจึงตั้งชื่อว่าเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo ดังนี้

นิยาม 3.11. ปริภูมิบานาค X จะเรียกว่าสอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo (เขียนย่อๆ ว่า DL) ถ้ามีจำนวนจริง $\lambda \in [0, 1)$ ซึ่งสำหรับทุกๆ เซตย่อยนูนและกระชับอย่างอ่อน C ของ X และสำหรับทุกๆ ลำดับมีขอบเขต $\{x_n\}$ ใน C ซึ่งเป็นปรกติเทียบกับ C จะได้ว่า

$$r_C(A(C,\{x_n\})) \le \lambda r(C,\{x_n\})$$

นอกจากนี้ Dhompongsa และคณะยังได้นิยามสมบัติ D (property D) ซึ่งเป็นการวางนัยโดยทั่วไปของเงื่อนไข DL ดังนี้

นิยาม 3.12. ปริภูมิบานาค X จะเรียกว่ามีสมบัติ D ถ้ามีจำนวนจริง $\lambda \in [0, 1)$ ซึ่งสำหรับทุกๆ เซตย่อยนูนและกระชับอย่างอ่อน C ของ X และสำหรับทุกๆ ลำดับมีขอบเขต $\{x_n\}$ ใน C ซึ่งเป็นปรกติและเป็นเชิงเส้นกำกับเอกรูปเทียบกับ C และสำหรับทุกๆ ลำดับ

$\{y_n\} \subset A(C, \{x_n\})$ ซึ่งเป็นปรกติและเป็นเชิงเส้นกำกับเอกรูปเทียบกับ C จะได้ว่า

$$r_C(A(C,\{y_n\})) \le \lambda r(C,\{x_n\})$$

Dhompongsa และคณะได้พิสูจน์ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคที่มีสมบัติ D จะมีสมบัติจุดตรึงอย่างอ่อนสำหรับการส่งหลายค่า จากผลลัพธ์ดังกล่าวทำให้สามารถสรุปได้ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคที่สอดคล้องเงื่อนไข DL จะมีสมบัติจุดตรึงอย่างอ่อนสำหรับการส่งหลายค่าด้วยเช่นกัน

ในปี ค.ศ. 2006 Garcia-Falset และคณะได้พิสูจน์ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูป (uniformly nonsquare) มีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งค่าเดียว จึงมีคำถามตามมาทันทีว่าผลลัพธ์นี้สามารถขยายไปยังการส่งหลายค่าได้หรือไม่ ต่อมา Dhompongsa และคณะได้พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

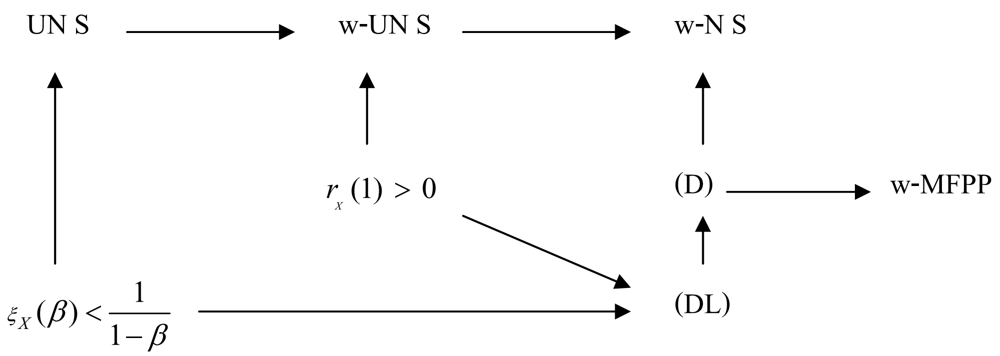
ทฤษฎีบท 3.13. ถ้า X เป็นปริภูมิไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูปที่มีสมบัติ WORTH แล้ว X จะสอดคล้องเงื่อนไข DL ซึ่งเป็นผลทำให้ X มีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า

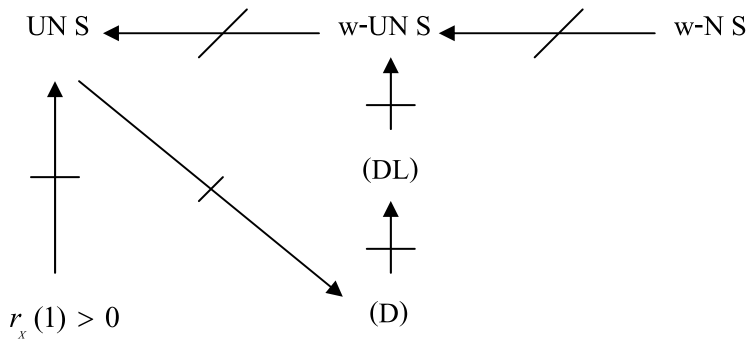
หมายเหตุ ผู้อ่านสามารถหาความหมายของสมบัติ WORTH ได้ใน (Dhompongsa et al., 2006)

จากผลลัพธ์นี้ยังไม่สามารถสรุปได้ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า อย่างไรก็ตาม S. Dhompongsa และคณะได้ตั้งปัญหาไว้ว่า

ปัญหา 3.14. เงื่อนไข X เป็นปริภูมิไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูปที่มีสมบัติ WORTH ในทฤษฎีบท 3.13 สามารถเปลี่ยนเป็น $C_{\mathrm{NJ}}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ หรือ $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือเป็นค่าอื่นๆ ที่มากกว่านี้ได้หรือไม่

ในปี ค.ศ. 2007 Dominguez และ Gavira ให้ข้อสังเกตว่าสมบัติทางเรขาคณิตที่มีผลทำให้ปริภูมิบานาค X มีสมบัติโครงสร้างปรกติเอกรูปหรือโครงสร้างปรกติเอกรูปอย่างอ่อน มักจะส่งผลให้ X มีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าด้วย และได้สรุปความสัมพันธ์ของเงื่อนไขต่างๆ ในปริภูมิบานาคไว้ดังแผนภาพต่อไปนี้





นอกจากนี้ Dominguez และ Gavira ยังได้พิสูจน์ความสัมพันธ์ $\rho'_X(0) < \frac{1}{2} \Rightarrow \xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta}$ สำหรับบาง $\beta \in (0,1)$ จากผลลัพธ์นี้ประกอบกับแผนภาพข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่าทุกปริภูมิเรียบแบบเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าซึ่งเป็นการตอบคำถามของปัญหา 3.8 ว่าเป็นจริง

ต่อมาในปี ค.ศ. 2008 Mazcunan-Navarro ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญ 2 ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 3.15. ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคซึ่ง $\rho'_X(0) < \frac{M(X)}{2}$ แล้ว X จะมีโครงสร้างปรกติ เมื่อ $M(X) := \sup\left\{\frac{1+a}{R(a,X)} : a \geq 0\right\}$ โดยที่ $R(a,X) := \sup\left\{\liminf_n \| x_n + x \| : \| x \| \leq a, B_X \supset \{x_n\} \xrightarrow{w} 0, \limsup_n \limsup_m \| x_n - x_m \| \leq 1\right\}$

ทฤษฎีบท 3.16. ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคซึ่ง $J(X) < 1 + \frac{1}{R(1,X)}$ แล้ว X จะมีโครงสร้างปรกติ

นอกจากนี้ Mazcunan-Navarro ยังได้พิสูจน์ความสัมพันธ์ 2 ข้อต่อไปนี้

(1) $C_{NJ}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C_{NJ}(X) < 1 + \frac{1}{J(X)^2} \Rightarrow C_{NJ}(X) < 1 + \frac{M(X)^2}{4} \Rightarrow \rho'_X(0) < \frac{M(X)}{2}$

(2) $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow J(X) < 1 + \frac{1}{R(1,X)}$

ต่อมา Gavira (Gavira, 2008) ได้พิสูจน์ว่าเงื่อนไขในทฤษฎีบท 3.15 และ 3.16 ส่งผลให้ X สอดคล้องเงื่อนไข DL ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.17. ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคซึ่ง $\rho'_X(0) < \frac{M(X)}{2}$ แล้ว X จะสอดคล้องเงื่อนไข DL

ทฤษฎีบท 3.18. ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคซึ่ง $J(X) < 1 + \frac{1}{R(1,X)}$ แล้ว X จะสอดคล้องเงื่อนไข DL

จากความสัมพันธ์ในข้อ (1) และ (2) ประกอบกับผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 3.17 และ 3.18 ทำให้สรุปได้ว่าปริภูมิบานาค X ที่มี $C_{NJ}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ หรือ $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ จะสอดคล้องเงื่อนไข DL ซึ่งเป็นการตอบคำถามของปัญหา 3.14 ว่าเป็นจริง

อย่างไรก็ตามในปัจจุบันยังมีปัญหาเปิดอีกมากมายเกี่ยวกับทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่า ผู้เขียนได้รวบรวมเฉพาะปัญหาที่สำคัญและนักคณิตศาสตร์ในปัจจุบันให้ความสนใจไว้ดังนี

ปัญหา 3.19. ปริภูมิไม่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าหรือไม่ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้า $C_{NJ}(X) < 2$ หรือ $J(X) < 2$ แล้ว X มี MFPP หรือไม่

ปัญหา 3.20. ปริภูมิบานาคที่มีโครงสร้างปรกติเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าหรือไม่

ปัญหา 3.21. ในปี 1997 Prus ได้นิยามปริภูมิบานาคไม่ยับแบบเอกรูป (uniformly noncreasy) และได้พิสูจน์ว่าทุกๆ ปริภูมิไม่ยับแบบเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งค่าเดียว ปัญหาก็คือปริภูมิไม่ยับแบบเอกรูปมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าหรือไม่

ปัญหา 3.22. เป็นที่ทราบกันดีว่าถ้าปริภูมิบานาค X มีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแล้ว X จะมีสมบัติจุดตรึงสำหรับการส่งค่าเดียว ปัญหาก็คือบทกลับของข้อความดังกล่าวเป็นจริงหรือไม่

สำหรับปัญหาอื่น หากผู้อ่านสนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากบทความของ Xu (Xu, 2000)

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา, ศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ สวนใต้, ศาสตราจารย์ ดร.สมยศ พลับเที่ยง และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถพล แก้วขาว สำหรับคำแนะนำที่เป็นประโยชน์และข้อคิดดีๆในการเขียนบทความครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

Ayerbe, J.M., Dominguez, T. & Lopez, G. (1997). Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Birkhauser.

Banach, S. (1992).Sur les operations dans les ensembles abs traits et leurs applications, *Fundamental Mathematics, 3*, 133-181.

Benitez, C., Przeslawski, K. & Yost, D. (1998). A universal modulus for normed spaces, *Studia Mathematics, 127*, 21-46.

Bohnenblust, H.F. & Karlin, S. (1950). On a theorem of Ville; in Contributions to the theory of games, (Kuhn and Tucker, eds.) pp. 195-225, University Press, Princeton, I.

Brouwer, L.E.J. (1912). Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Mathematics Annals, 71*, 97-115.

Bynum, W.L. (1980). Normal structure coefficients for Banach spaces. *Pacific Journal of Mathemics, 86*, 427-435.

Clarkson, J.A. (1937). The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces. *Annals of Mathematics, 38*, 114-115.

Dhompongsa, S., Dominguez, T., Kaewcharoen, A., Kaewkhao, A. & Panyanak, B. (2006). The Jordan-von Neumann constant and fixed points for multivalued nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 320*, 916-927.

Dhompongsa, S., Kaewcharoen, A. & Kaewkhao, A. (2006). The Dominguez-Lorenzo condition and multivalued nonexpansive mappings. *Nonlinear Analysis, 64*, 958-970.

Dominguez, T. & Gavira, B. (2007). The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328*, 1471-1483.

Dominguez, T. & Lorenzo, P. (2003). Fixed point theorems for multivalued nonexpansive mappings without uniform convexity. *Abstract and Applied Analysis, 2003*, 375-386.

Dominguez, T. & Lorenzo, P. (2004). Asymptotic centers and fixed points for multivalued nonexpansive mappings, *Anal University Marie Curie-Sklodowska LVIII*, 37-45.

Gao, J. & Lau, K-S. (1990). On the geometry of sphere in normed linear spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A). 48*, 101-112.

Garcia-Falset, J., Llorens-Fuster, E. & Mazcunan-Navarro, E.M. (2006). Uniformly nonsquare Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings. *Journal of Functional Analysis. 233*, 494-514.

Gavira, B. (2008). Some geometric conditions which imply the fixed point property for multivalued nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 339*, 680-690.

Gossez, J.P. & Lami Dozo, E. (1972). Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings. *Pacific Journal Mathematics. 40*, 565-573.

Huff, R. (1980). Banach spaces which are nearly uniformly convex, *Rocky Mountain Journal of Mathematics. 10*, 743-749.

Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal. 8*, 457-459.

Kato, M., Maligranda, L. & Takahashi, Y. (2001). On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces, Studia Mathematics. 144, 275-295.

Kirk, W.A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *American Mathematics Monthly. 72*, 1004-1006.

Kirk, W.A. (1986). Nonexpansive mappings in product spaces, set-valued mappings, and k-uniform rotundity, Nonlinear Functional Analysis and its Applications (F. E. Browder, ed.), (pp. 51-64). Proc. Symp. Pure Math. 45, Part 2, American Mathemaitcs Society, Providence, RI.

Kirk, W.A. & Massa, S. (1990). Remarks on asymptotic and Chebyshev centers. *Houston Journal Mathematics. 16*, 357-363.

Kuczumow, T. & Prus, S (1990). Asymptotic centers and fixed points of multivalued nonexpansive Mappings. *Houston Journal Mathematics. 16*, 465-468.

Lami Dozo, E. (1973). Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition, Proceeding of the American Mathematical Society. 38, 286-292.

Lim, T.C. (1974). A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach spaces, Bulletin of the American Mathematical Society. 80, 1123-1126.

Lin, P.K., Tan, K.K. & Xu, H.K. (1995). Demiclosedness principle and asymptotic behavior for asymptotically nonexpansive mappings. *Nonlinear Analysis. 24*, 929-946.

Mazcunan-Navarro, E. M. (2003). Geometry of Banach spaces in metric fixed point theory, Ph.D. Thesis, Departmento de Analisis Mathematico, Universitat de Valencia, Valencia.

Mazcunan-Navarro, E. M. (2008). Banach space properties sufficient for normal structure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 337*, 197-218.

Nadler, S.B. (1969). Multivalued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics 30*, 475-488.

Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society. 73*, 591-597.

Prus, S. (1997). Banach spaces which are uniformly noncreasy. *Nonlinear Analysis. 30*, 2317-2324.

Prus, S. (1991). Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces. *Rendiconti del Circdo Matematico di Palermo XL 40*, 128-135.

Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalr¨aumen. *Studia Mathematics. 2*, 171-180.

Xu, H.K. (2000). Metric fixed point theory for multivalued mappings. *Dissertationes Mathematics. (Rozprawy Mat.) 389*, 1-39.