สัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิตและทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า

Geometric Coefficients and Fixed Point Theorems for Multivalued Nonexpansive Mappings

อัญชลีย์ แก้วเจริญ*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

Anchalee Kaewcharoen*

Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อเรียบเรียงถึงทฤษฎีบทการมีจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าซึ่งเกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิตของปริภูมิบานาค โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ค่าคงที่เจมส์ และค่าคงที่จอร์แดน- วอน นอยมันน์

คำสำคัญ : ฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า สมบัติเวอร์ธ ความไม่จัตุรัสเอกรูป ค่าคงที่เจมส์ ค่าคงที่จอร์แดน-วอน นอยมันน์

Abstract

The main purpose of this article is to review some existence theorems of fixed points of nonexpansive multivalued mappings related to some geometric coefficients of a Banach space, in particular, the James constant and the Jordan - von Neumann constant.

Keywords : multivalued nonexpansive mappings, property WORTH, uniform nonsquareness, the James constant, the Jordan - von Neumann constant

E-mail: anchaleeka@nu.ac.th

บทนำ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค (Banach space) และ

FB(X) แทนวงศ์ของเซตย่อยปิดของ X ที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่าง

KC(X) แทนวงศ์ของเซตย่อยคอนเวกซ์กระชับของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง

กำหนดให้ $H(\cdot,\cdot)$ แทนระยะทางเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff distance) บน *FB(X)* นั่นคือ

$H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\operatorname{dist}(a,B), \sup_{b\in B}\operatorname{dist}(b,A)\}$ สำหรับทุก $A, B \in FB(X)$ โดยที่ $\operatorname{dist}(x,C)=\inf\{\|x-y\| : y\in C\}$ คือระยะทางจากจุด $x \in X$ ไปยังเซต $C\subseteq X$

ให้ E เป็นเซตย่อยปิดของ X จะกล่าวว่า $T: E \to FB(X)$ เป็นคอนแทรคชัน (contraction) ถ้ามีค่าคงที่ $k\in[0,1)$ ซึ่งทำให้

$$H(Tx,Ty) \le k\|x-y\| \text{ สำหรับทุก } x, y \in E \qquad (1)$$

ถ้า (1) เป็นจริงเมื่อ $k=1$ แล้วจะเรียก T ว่าเป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า (mutivalued nonexpansive mapping) และจะกล่าวว่าจุด x เป็นจุดตรึง (fixed point) สำหรับ T ถ้า $x \in Tx$

ให้ $t: E \to X$ เราจะกล่าวว่า t เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียว (single-valued nonexpansive mapping) ถ้า

$$\|tx-ty\| \le \|x-y\| \text{ สำหรับทุก } x, y \in E$$

และเรียกจุด x ว่าเป็นจุดตรึงสำหรับ t ถ้า $tx = x$

ปัญหาทฤษฎีบทจุดตรึงที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งคือ การขยายการมีจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียวไปยังฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาค ได้มีนักวิจัยหลายท่านศึกษาการมีจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิต่างๆ เช่น ปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric spaces) โดย Nadler ในปี 1969 ปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniformly convex Banach spaces) โดย Lim ในปี 1974 จากการศึกษางานวิจัยในปริภูมิดังกล่าวจึงทำให้เกิดข้อปัญหาที่น่าสนใจที่จะศึกษาการมีจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาคอื่นๆ

นิยามและความรู้พื้นฐาน

ปี 1969 Nadler (Nadler, 1969) ได้ศึกษาและขยายทฤษฎีบทหลักคอนแทรคชันของบานาค (Banach's contraction principle) สำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียวไปยังฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ ต่อมา ในปี 1974 Lim (Lim, 1974) ได้ศึกษาในปริภูมินานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป หลังจากนั้นได้มีผู้วิจัยหลายท่านได้ศึกษาและขยายทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียวไปยังฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาคอื่นๆ

ในปี 1974 Lim ได้ใช้แนวคิดของศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ (asymptotic center) เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป (ดูบทนิยาม 3)

<u>บทนิยาม 1</u> ให้ E เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน X เราใช้สัญลักษณ์ $r(E,\{x_n\})$ และ $A(E,\{x_n\})$ แทนรัศมีเชิงเส้นกำกับ (asymptotic radius) และศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ (asymptotic center) ของ $\{x_n\}$ ใน E ตามลำดับ นิยามโดย

$$r(E,\{x_n\}) = \inf\{\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| : x\in E\}$$

$$A(E,\{x_n\}) = \{x\in E : \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| = r(E,\{x_n\})\}$$

ถ้า E เป็นเซตคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อนที่ไม่เป็นเซตว่างแล้ว $A(E,\{x_n\})$ จะเป็นเซตคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อนที่ไม่เป็นเซตว่างด้วยเช่นเดียวกัน (Goebel & Kirk, 1990)

<u>บทนิยาม 2</u> ให้ E เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X และ $\{x_n\}$ เป็น ลำดับที่มีขอบเขตใน X เรียก $\{x_n\}$ ว่า*ลำดับปรกติสัมพันธ์กับ* E (regular sequence relative to E) ถ้า $r(E,\{x_n\}) = r(E,\{x_{n_i}\})$ สำหรับทุกลำดับย่อยของ $\{x_{n_i}\}$ และเรียก $\{x_n\}$ ว่า*ลำดับเอกรูปเชิงเส้นกำกับสัมพันธ์กับ* E (asymptotically uniform sequence relative to E) ถ้า $A(E,\{x_n\}) = A(E,\{x_{n_i}\})$ สำหรับทุกลำดับย่อย $\{x_{n_i}\}$ ของ $\{x_n\}$

<u>บทนิยาม 3</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า X เป็น*ปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป* (uniformly convex space) ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ ซึ่ง $\|x\| = \|y\| = 1$ และ $\|x-y\| \ge \varepsilon$

ในปี 1990 Kirk และ Massa (Kirk & Massa, 1990) ได้ขยายงานวิจัยของ Lim โดยกำหนดเงื่อนไขว่าศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตในเซตย่อยคอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขตของปริภูมิบานาค ไม่เป็นเซตว่างและเป็นเซตกระชับ ภายใต้สมมติฐานดังกล่าว ปริภูมิบานาคจะมีสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า (Kirk & Massa, 1990)

<u>บทนิยาม 4</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ A เป็นเซตย่อยมีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของ X เรียก

$$\beta(A) = \sup\{\varepsilon > 0 : \text{มีบาง } \{x_n\} \text{ ใน } A \text{ ซึ่ง } \operatorname{sep}(\{x_n\}) \geq \varepsilon\}$$

โดยที่ $\operatorname{sep}(\{x_n\}) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\}$

ว่า*การวัดการแยกกันของความไม่กระชับของ* A (separation measure of noncompactness of A) และเรียก

$$\chi(A) = \inf\{d > 0 : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, d) \text{ และ } x_i \in X\}$$

ว่าการวัดเฮาส์ดอร์ฟของความไม่กระชับของ A (Hausdorff measure of noncompactness of A)

<u>บทนิยาม 5</u> เรียกฟังก์ชัน $T : E \to 2^X$ ว่า 1-ϕ-คอนแทรคทีฟ (1-ϕ-contractive) เมื่อ $\phi = \beta$ หรือ $\phi = \chi$ ถ้าสำหรับทุกเซตย่อยมีขอบเขต A ของ E ซึ่ง $\phi(A) > 0$ จะได้ว่า

$$\phi(T(A)) \leq \phi(A)$$

โดยที่ 2^x แทนวงศ์ของเซตย่อยของ X และ $T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$

<u>บทนิยาม 6</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $\phi = \beta$ หรือ $\phi = \chi$ มอดุลัสของความคอนเวกซ์แบบไม่กระชับที่สอดคล้องกับ ϕ (modulus of noncompact convexity associated to ϕ) นิยามโดย $\Delta_{X,\phi}(\varepsilon) = \inf\{1 - \operatorname{dist}(0, A) : A \subset B_X$ เป็นเซตคอนเวกซ์ที่ $\phi(A) \geq \varepsilon\}$ เมื่อ B_X คือบอลปิดหนึ่งหน่วยใน X

ลักษณะเฉพาะของความคอนเวกซ์แบบไม่กระชับของ X (characteristic of noncompact convexity of X) ที่สอดคล้องกับ ϕ นิยามโดย

$$\varepsilon_\phi(X) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \Delta_{X,\phi}(\varepsilon) = 0\}$$

ความสัมพันธ์ของมอดุลัสข้างต้นคือ $\Delta_{X,\beta}(\varepsilon) \leq \Delta_{X,\chi}(\varepsilon)$ ดังนั้น $\varepsilon_\beta(X) \geq \varepsilon_\chi(X)$ (Ayerbe *et al.*, 1997)

<u>บทนิยาม 7</u> ให้ E เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X นิยามเซตชี้เข้า (inward set) ของ E ที่จุด $x \in E$ ดังนี้

$$I_E(x) = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \geq 1,\ y \in E\}$$

ในกรณีที่ E เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ ปิด ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X จะได้ว่า

$$I_E(x) = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \geq 0,\ y \in E\}$$

จะกล่าวว่า $T : E \to 2^X$ เป็นฟังก์ชันชี้เข้า (inward function) บน E ถ้า $Tx \subset I_E(x)$ สำหรับทุก $x \in E$
และกล่าวว่า $T : E \to 2^X$ เป็นฟังก์ชันชี้เข้าแบบอ่อน (weakly inward) บน E ถ้า $Tx \subset \overline{I_E(x)}$ สำหรับทุก $x \in E$

<u>บทนิยาม 8</u> ให้ C เป็นเซตย่อยที่มีขอบเขตของ X รัศมีเชบิเชฟ (Chebyshev radius) ของ C ซึ่งสัมพันธ์กับ E คือ

$$r_E(C) = \inf\{r_x(C) : x \in E\}$$

โดยที่ $r_x(C) = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}$

ในปี 2004 Dominguez และ Lorenzo ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เป็น 1–χ–คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า (inwardness) โดยศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง รัศมีเชบิเชฟ ของศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตในเซตย่อยคอนเวกซ์ปิดซึ่งมีขอบเขต และมอดุลัสของความคอนเวกซ์แบบไม่กระชับของปริภูมิบานาคดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 9</u> (Dominguez & Lorenzo, 2004) ให้ X เป็นปริภูมิบานาคสะท้อน และ E เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์ ปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ X สมมติว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน E ซึ่งเป็นลำดับปรกติสัมพันธ์กับ E จะได้ว่า

$$r_E(A(E, \{x_n\})) \leq (1 - \Delta_{X,\beta}(1^-))\, r(E, \{x_n\})$$

โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทข้างต้น จะได้ว่าทุกฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เป็น 1–χ– คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้าจะมีจุดตรึง (Dominguez & Lorenzo, 2004) กล่าวคือ

<u>ทฤษฎีบท 10</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาคที่ $\varepsilon_\beta(X) < 1$ และ E เป็นเซตย่อยแยกกันได้ คอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่าง

ของ X สมมติว่า $T: E \to KC(X)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เป็น $1-\chi-$ คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า แล้วจะได้ว่า T จะมีจุดตรึง

นอกจากนี้ Dominguez & Lorenzo (2004) ยังได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 9 เพื่อพิสูจน์ปัญหาเปิดของ Xu (2000) กล่าวคือได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับ $T: E \to KC(E)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า เมื่อ E เป็นเซตย่อย คอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขตที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาคเนียลิคอนเวกซ์แบบเอกรูป X (nearly uniformly convex Banach space X) (Dominguez & Lorenzo, 2004)

สัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิตและทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิต กล่าวคือ ค่าคงที่เจมส์ (James constant) และค่าคงที่จอร์แดน วอน นอยมันน์ (Jordan von Neumann constant)

1. ค่าคงที่เจมส์ (James constant)

จากการศึกษาผลงานของ Dominguez & Lorenzo (2004) ที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง รัศมีเชบิเชฟของศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตในเซตย่อยคอนเวกซ์ปิด มีขอบเขต และมอดุลัสของความคอนเวกซ์แบบไม่กระชับของปริภูมิบานาค รวมทั้งการประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวเพื่อศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า ทำให้ Dhompongsa *et al.* (2006) ได้นิยามความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีเชบิเชฟของศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับ และรัศมีเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตในเซตย่อยคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อนของปริภูมิบานาค X ต่อไปนี้

<u>บทนิยาม 11</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า X สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo ถ้ามี $\lambda \in [0,1)$ ที่ทำให้สำหรับทุกเซตย่อย E ของ X ซึ่งเป็นเซตคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อน และสำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}$ ใน E ที่มีขอบเขตและเป็นลำดับปรกติสัมพันธ์กับ E จะได้ว่า

$$r_E(A(E,\{x_n\})) \le \lambda r(E,\{x_n\})$$

เราจะกล่าวว่าปริภูมิบานาค X มีโครงสร้างปรกติแบบอ่อน (weak normal structure) ถ้าสำหรับทุกเซตย่อย E ของ X ซึ่งเป็นเซตคอนเวกซ์ กระชับแบบอ่อน และ diam $(E)>0$ จะมีจุด $x \in E$ ซึ่งทำให้

$$r_x(E) < \operatorname{diam}(E)$$

จากการศึกษาเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo จะได้ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคที่สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo จะมีโครงสร้างปรกติแบบอ่อน (Dhompongsa *et al.*, 2006) ดังนั้นทำให้สรุปได้ว่า ทุกๆ ปริภูมิบานาคที่สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo มีสมบัติจุดตรึง (fixed point property) สำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียว นั่นคือ สำหรับทุกเซตย่อย E ของ X ซึ่งเป็นเซตคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อน และสำหรับทุกฟังก์ชัน $t: E \to E$ ที่เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียวจะมีจุดตรึง นอกจากนี้ Dhompongsa *et al.* (2006) ยังได้ศึกษาสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า ในปริภูมิบานาคสะท้อนที่สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 12</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาคสะท้อนที่สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo และ E เป็นเซตย่อยแยกกันได้ คอนเวกซ์ ปิด ที่มีขอบเขตของ X สมมติว่า $T: E \to KC(X)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่า ที่เป็น $1-\chi-$คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า แล้วจะได้ว่า T จะมีจุดตรึง

จากทฤษฎีบท 9 เราเห็นได้ว่าทุกๆ ปริภูมิบานาคซึ่ง $\varepsilon_\beta(X) < 1$ นั้นสอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo ต่อไปจะศึกษาปริภูมิบานาคอื่นๆ ที่สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo

<u>บทนิยาม 13</u> จะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิบานาคไม่จัตุรัสแบบเอกรูป (uniformly nonsquare Banach space) ถ้ามี $\delta \in (0,1)$ ซึ่งทำให้สำหรับทุก $x, y \in S_X$ จะได้ว่า

$$\tfrac{1}{2}\|x+y\| \le 1-\delta \quad \text{หรือ} \quad \tfrac{1}{2}\|x-y\| \le 1-\delta$$

เมื่อ $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค Gao & Lau (1990) นิยามค่าคงที่เจมส์ หรือค่าคงที่ไม่จัตุรัส (Jame constant or nonsquare constant) ดังนี้

$$J(X) = \sup\{\|x+y\| \wedge \|x-y\| : x, y \in B_X\}$$

เมื่อ $\|x+y\| \wedge \|x-y\| = \min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$

และได้ว่า X เป็นปริภูมิบานาคไม่จัตุรัสแบบเอกรูป ก็ต่อเมื่อ $J(X) < 2$ (Gao & Lau, 1990)

Dhompongsa *et al.* (2006) ได้พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีเชบิเชฟของศูนย์กลางเชิงเส้นกำกับของลำดับที่มีขอบเขตในเซตย่อยคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อน และรัศมีเชิงเส้นกำกับ และจากความสัมพันธ์ดังกล่าว จะได้ว่าปริภูมิบานาคไม่จัตุรัสแบบเอกรูปซึ่งมีสมบัติเวอร์ธ (WORTH) จะสอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo

<u>บทนิยาม 14</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า X มีสมบัติเวอร์ธ (WORTH) ถ้าสำหรับทุก $x \in X$ และสำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}$ ที่ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ 0 ใน X แล้วจะได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n + x\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|$$

เราจะกล่าวว่า X สอดคล้องเงื่อนไขโอเพียลไม่แท้ (non-strict Opial condition) ถ้าสำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}$ ที่ลู่ x เข้าแบบอ่อนสู่ x แล้วสำหรับ $y \neq x$ จะได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

เราจะได้ว่าถ้า X มีสมบัติเวอร์ธ แล้ว X จะสอดคล้องเงื่อนไขโอเพียลไม่แท้ (Garcia-Falset & Sims, 1997)

<u>ทฤษฎีบท 15</u> (Dhompongsa *et al.*, 2006) ให้ X เป็นปริภูมิบานาคซึ่งมีสมบัติเวอร์ธ และ E เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อนของ X สมมติให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในที่ปรกติสัมพันธ์กับ X แล้วจะได้ว่า

$$r_E(A(E,\{x_n\})) \leq \frac{J(X)}{2} r(E,\{x_n\})$$

จากความสัมพันธ์ในทฤษฎีบท 15 จะได้ว่าถ้า X เป็นปริภูมิบานาคไม่จัตุรัสแบบเอกรูปซึ่งมีสมบัติเวอร์ธ แล้ว X สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo จากผลดังกล่าวและทฤษฎีบท 12 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 16</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาคไม่จัตุรัสแบบเอกรูปซึ่งมีสมบัติเวอร์ธ และ E เป็นเซตย่อยแยกกันได้ คอนเวกซ์ ปิด ที่มีขอบเขตของ X สมมติว่า $T : E \to KC(X)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า แล้วจะได้ว่า T จะมีจุดตรึง

จากทฤษฎีบท 16 จะเห็นได้ว่าเราสามารถตัดเงื่อนไขความเป็น $1-\chi-$คอนแทรคทีฟ ของ T ได้ เนื่องจากถ้าปริภูมิบานาคมีสมบัติเวอร์ธ แล้ว X จะสอดคล้องเงื่อนไขโอเพียลไม่แท้ จึงทำให้ T จะเป็น $1-\chi-$ คอนแทรคทีฟ (Dominguez & Lorenzo, 2004) ทำให้สรุปได้ว่าทุกปริภูมิบานาคไม่จัตุรัสแบบเอกรูปซึ่งมีสมบัติเวอร์ธ จะมีสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า

2. ค่าคงที่จอร์แดน-วอน นอยมันน์ (Jordan - von Neumann constant)

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค Clarkson (1973) ได้นิยามค่าคงที่จอร์แดน-วอน นอยมันน์ (Jordan - von Neumann constant) ของ X ดังนี้

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} : x, y \in X \setminus \{0\} \right\}$$

จะได้ว่าถ้า $C_{NJ}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ แล้ว X จะมีโครงสร้างปรกติเอกรูป (uniform normal structure) (Dhompongsa & Keawkhao, 2006 ; Saejung, 2006) ดังนั้น X จะมีสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียวถ้า $C_{NJ}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ต่อไปเราจะศึกษาสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่จอร์แดน วอน นอยมันน์ ซึ่งในปี 2006 นั้น Dhompongsa *et al.* ได้นิยามสมบัติ (D) ดังนี้

<u>บทนิยาม 17</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า มีสมบัติ (D) ถ้ามี $\lambda \in [0,1)$ ที่ทำให้สำหรับทุกเซตย่อย E ของ X ซึ่งเป็นเซตคอนเวกซ์กระชับแบบอ่อน และสำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}$ ใน E ที่เป็นลำดับเอกรูปเชิงเส้นกำกับและเป็นลำดับปรกติสัมพันธ์กับ E และสำหรับทุกลำดับ $\{y_n\}$ ใน $A(E,\{x_n\})$ ที่เป็นลำดับเอกรูปเชิงเส้นกำกับและเป็นลำดับปรกติสัมพันธ์กับ E จะได้ว่า

$$r_E(A(E,\{y_n\})) \leq \lambda\, r(E,\{x_n\})$$

จากนิยามจะเห็นได้ว่าสมบัติ (D) เป็นสมบัติที่อ่อนกว่าเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo (Dominguez & Gavira, 2007) และนอกจากนี้ยังได้ว่าทุกปริภูมิบานาคที่มีสมบัติ (D) จะมีโครงสร้างปรกติแบบอ่อน และมีสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เป็น $1-\chi-$ คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า (Dhompongsa *et al.*, 2006)

<u>บทนิยาม 19</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค สัมประสิทธิ์ลำดับลู่เข้าแบบอ่อน (weakly convergent sequence coefficient) ของ X คือ

$$WCS(X) = \inf\left\{ \frac{\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|}{\lim_{n\to\infty} \|x_n\|} \right\}$$

เมื่อ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแบบอ่อนสู่ 0 ซึ่ง $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|$ และ $\lim_{n,m;n\neq m}\|x_n - x_m\|$ หาค่าได้

เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่จอร์แดน วอนนอยมันน์ และ สัมประสิทธิ์ลำดับลู่เข้าแบบอ่อนของปริภูมิบานาค X กล่าวคือ

$$[WCS(X)]^2 \geq \frac{2C_{NJ}(X)+1}{2[C_{NJ}(X)]^2}$$

และได้ว่าทุกปริภูมิบานาคซึ่ง $C_{NJ}(X) < 1 + \frac{[WSC(X)]^2}{4}$ จะมีสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลาย ค่าที่เป็น $1-\chi$–คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า (Dhompongsa *et al*., 2006) จากผลที่ได้ดังกล่าวทำได้ทฤษฎีบทที่สำคัญดังนี้

<u>ทฤษฎีบท 20</u> ให้ X เป็นปริภูมิบานาค ซึ่ง $C_{NJ}(X) < 1.273\ldots$ และ E เป็นเซตย่อยแยกกันได้ คอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขตของ X สมมติว่า $T : E \to KC(X)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าที่เป็น $1-\chi-$ คอนแทรคทีฟ และสอดคล้องกับเงื่อนไขความชี้เข้า แล้วจะได้ว่า T จะมีจุดตรึง

สรุป

จากบทความวิชาการนี้จะเห็นได้ว่าหัวข้องานวิจัยที่น่าสนใจหัวข้อหนึ่งคือการศึกษาการขยายสมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายค่าเดียวไปยัง ฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าในปริภูมิบานาคต่างๆ แนวทางหนึ่งที่สามารถประยุกต์ใช้เพื่อศึกษาการมีจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าคือการตรวจสอบว่าในปริภูมิบานาคนั้นๆ สอดคล้องเงื่อนไข Dominguez-Lorenzo หรือสอดคล้องสมบัติ (D) ซึ่งเป็นการเพียงพอที่ผู้วิจัยสามารถยืนยันการมีจุดตรึงได้ ซึ่งในปัจจุบันนี้ยังมีปริภูมิบานาคอีกหลายปริภูมิที่นักวิจัยยังไม่สามารถให้ผลสรุปของการมีจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายหลายค่าได้ เช่น ปริภูมิบานาคนอนคริสซีแบบเอกรูป (uniformly noncreasy Banach space) ซึ่งเป็นปัญหาที่น่าสนใจในการศึกษาวิจัยต่อไปในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

Ayerbe, J.M., Dominguez Benavides, T., & Lopez Acedo, G. (1997). Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory, Operator Theory : Advances and Applications. Birkauser. Basel.

Clarkson, J.A. (1973). The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces. *Annals of Mathematics. 38*, 114-115.

Dhompongsa, S., Dominguez Benavides, T., Kaewcharoen, A., Kaewkhao, A., & Panyanak, B. (2006). The Jordan-von Neumann constants and fixed points for multivalued nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 320*, 916-927.

Dhompongsa, S., Kaewcharoen, A., & Kaewkhao, A. (2006). The Dominguez-Lorenzo condition and multivalued nonexpansive mappings. *Nonlinear Analysis. 64*, 958-970.

Dhompongsa, S., & Kaewkhao, A. (2006). A note on properties that imply the weak fixed point property. *Abstract and Applied Analysis*. 2006, Article ID 34959, 1-12.

Dominguez Benavides, T., & Gavira, B. (2007). The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 328*, 1471-1483.

Dominguez Benavides, T., & Lorenzo Ramirez, P. (2004). Fixed point theorems for multivalued nonexpansive mappings satisfying inwardness conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 291*, 100-108.

Dominguez Benavides, T., & Lorenzo Ramirez, P. (2004). Asymptotic centers and fixed points for multi-valued nonexpansive mappings. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska* LVIII. 37-45.

Gao, J., & Lau, K.S. (1990). On the geometry of spheres in normed linear spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society. 48*, 101-112.

Garcia-Falset, J., & Sims, B. (1997). Property (M) and the weak fixed point property. *Proceedings of the American Mathematical Society. 125*, 2891-2896.

Goebel, K., & Kirk, W.A. (1990). Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge. Cambridge University Press.

Kirk, W.A., & Massa, S. (1990). Remarks on asymptotic and Chebyshev centers. *Houston Journal of Mathematics. 16*, 357-364

Lim, T.C. (1974). A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space. *Bulletin of the American Mathematical Society. 80*, 1123-1126.

Nadler, S.B. Jr. (1969). Multivalued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics. 30*, 475-488.

Saejung, S. (2006). On James and von-Neumann Constants and sufficient conditions for the fixed point property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 323*, 1028-1084.

Xu, H.K. (2000). Metric fixed point theory for multivalued mappings. Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne).