การระบายสีแบบเท่าเทียมในกราฟ
Equitable Colorings in Graphs

เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์*
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
Keaitsuda Nakprasit*
Department of Mathematics, Faculty of Science, Khon Kaen University.

บทคัดย่อ

กราฟ G สามารถระบายสีด้วยสี k สีแบบเท่าเทียม ถ้าสามารถแบ่งกั้นเซตของจุดยอดเป็นเซตอิสระจำนวน k เซต โดยที่จำนวนจุดยอดของเซตสองเซตใดๆ แตกต่างกันอย่างมากที่สุดเท่ากับหนึ่งจุด รงคเลขแบบเท่าเทียมของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\chi_=(G)$ คือจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดซึ่ง G สามารถระบายสีด้วยสี k สีแบบเท่าเทียมได้ ในบทความนี้ เรารวบรวมและให้ความเห็นเกี่ยวกับผลการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการระบายสีแบบเท่าเทียม ข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับการระบายสีแบบเท่าเทียม รงคเลขแบบเท่าเทียมในกราฟบางประเภท รวมถึงเสนอปัญหาเปิดสำหรับการระบายสีแบบเท่าเทียมด้วย

คำสำคัญ : การระบายสีแบบเท่าเทียม รงคเลขแบบเท่าเทียม

Abstract

A graph G is equitably k-colorable if its vertex set can be partitioned into k independent sets in such a way that the numbers of vertices in any two sets differ by at most one. The equitable chromatic number of G, denoted by $\chi_=(G)$, is the smallest positive integer k such that G is equitably k-colorable. In this article, we collect and give comments about the results concerning the equitable coloring about the equitable coloring conjectures and the equitable chromatic numbers in some classes of graphs. Moreover, we give some open problems in this topic.

Keywords : equitable coloring, equitable chromatic number

***E-mail: kmaneeruk@hotmail.com**

บทนำ

ในปัจจุบันทฤษฎีกราฟ (graph theory) มีการศึกษาปัญหาการให้สีวัตถุในกราฟกันอย่างแพร่หลายและยังคงได้รับการพัฒนาทฤษฎีบทจำนวนมากอย่างต่อเนื่อง ซึ่งพิสูจน์ได้จากผลงานตีพิมพ์ในหนังสืออ้างอิงที่ปรากฏในหนังสือปัญหาการระบายสีกราฟ (Graph Coloring Problems) ของ แจนเซนและโทฟท์ (Jensen & Toft, 1995) หนึ่งในปัญหาการให้สีวัตถุในกราฟที่ได้รับความสนใจคือปัญหาการระบายสีจุดยอดของกราฟ

กราฟ G = (V(G),E(G)) หรือ G = (V,E) ประกอบด้วยเซตของจุดยอด V(G) และเซตของเส้นเชื่อม E(G) ในบทความนี้เราพิจารณาเฉพาะกราฟ G ซึ่งมี V(G) เป็นเซตจำกัด ไม่มีเส้นเชื่อมซ้อน (multiple edge) และไม่มีวงวน (loop) ถ้าสามารถแบ่งกั้นเซตของจุดยอดในกราฟ G ออกเป็นเซตอิสระ (independent set) (นั่นคือ จุดยอดสองจุดใดๆ ในเซตนี้ไม่ประชิดกัน) จำนวน k เซต V_1, V_2,...,V_k แล้วเรากล่าวว่า G *สามารถระบายสี k สี* (k-colorable) และเรียกเซตทั้ง k เซตว่า *คลาสของสี* (color classes) จำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดซึ่ง G สามารถระบายสี k สีได้เรียกว่า*รงคเลข* (chromatic number) ของ G เขียนแทนด้วย χ(G) เรากล่าวว่ากราฟ G *สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียม* (equitably k-colorable) ถ้า G สามารถระบายสี k สี โดยที่จำนวนจุดยอดของเซตสองเซตใดๆ แตกต่างกันอย่างมากที่สุดเท่ากับหนึ่งจุด และเรียกจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดซึ่ง G สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียมว่า*รงคเลขแบบเท่าเทียม* (equitable chromatic number) ของ G เขียนแทนด้วย $\chi_=$(G) การระบายสีแบบเท่าเทียมนำเสนอครั้งแรกโดยวอลเทอร์ เมเยอร์ (Meyer, 1973) ซึ่งได้รับแรงบันดาลใจจากทักเกอร์ (Tucker, 1973) โดยจุดยอดในปัญหาของเมเยอร์แทนเส้นทางในการเก็บขยะ และจุดยอดสองจุดใดๆ ประชิดกันเมื่อไม่สามารถเก็บขยะในเส้นทางที่สมนัยกันในวันเดียวกันได้ โดยเมเยอร์ต้องการให้จำนวนของเส้นทางการเก็บขยะใกล้เคียงกันทั้ง 6 วัน ซึ่งคำตอบของปัญหานี้คือการหารูปแบบการระบายสี 6 สีแบบเท่าเทียมนั่นเอง

ระดับขั้น (degree) ของจุดยอด x ในกราฟ G คือจำนวนเส้นเชื่อมที่มี x เป็นจุดปลาย เขียนแทนด้วย $d_G(x)$ หรือ d(x) ค่าสูงสุดของระดับขั้นของจุดยอดทั้งหมดในกราฟ G เขียนแทนด้วย Δ(G) เราให้ $\lceil x \rceil$ และ $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ไม่น้อยกว่า x และจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ไม่มากกว่า x ตามลำดับ เมเยอร์ (Meyer, 1973) ได้แสดงว่ากราฟต้นไม้ (tree) T สามารถระบายสี $\lceil \Delta(T)/2 \rceil+1$ สีแบบเท่าเทียม แต่ภายหลังเอกเกิลทัน (Eggleton) พบข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ (ซึ่งนำมาเผยแพร่โดยกาย (Guy, 1975)) และได้ขยายผลลัพธ์ของเมเยอร์โดยแสดงว่ากราฟต้นไม้ T สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียมสำหรับทุก $k \geq \lceil \Delta(T)/2 \rceil+1$ ซึ่งโบลโลบาสและกาย (Bollobas & Guy, 1983) ได้พิสูจน์ผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องกับการระบายสีกราฟต้นไม้ที่ละเอียดขึ้น โดยแสดงว่า กราฟต้นไม้ T ซึ่งมีจุดยอด t จุด สามารถระบายสีแบบเท่าเทียม 3 สี สำหรับ t ซึ่ง $t \geq 3\Delta(T)-8$ หรือ $t=3\Delta(T)-10$

สิ่งที่ได้รับความสนใจมากที่สุดใน (Meyer, 1973) คือข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับการระบายสีจุดยอดแบบเท่าเทียม ซึ่งได้รับแรงบันดาลใจจากทฤษฎีบทของบรุกส์ (Brooks' Theorem) (Brooks, 1941) ซึ่งกล่าวว่า สำหรับกราฟ G ซึ่งเชื่อมโยง ถ้า G ไม่ใช่กราฟแบบบริบูรณ์หรือกราฟวงคี่แล้ว $\chi(G) \leq \Delta(G)$

ข้อความคาดการณ์การระบายสีแบบเท่าเทียม (The Equitable Coloring Conjecture: ECC) ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง ถ้า G ไม่ใช่กราฟแบบบริบูรณ์หรือกราฟวงคี่ แล้ว $\chi_=(G) \leq \Delta(G)$

ฮอยนอลและเซเมเรดิ (Hajnal & Szemeredi, 1970) ได้เขียนข้อความ ECC ใหม่ในรูปแบบการระบายสีแบบเท่าเทียมและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 กราฟ G (ไม่จำเป็นต้องเชื่อมโยง) สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียม สำหรับทุก $k \geq \Delta(G)+1$

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้ยาวและยากต่อการทำความเข้าใจ ภายหลังเคียร์สเตดและคอสโทชคา (Kierstead & Kostochka, 2008) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ใหม่ในทิศทางของการระบายสีแบบเท่าเทียม

สิ่งที่น่าสนใจสำหรับการระบายสีแบบเท่าเทียมคือ ถ้ากราฟ G สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียมแล้วไม่จำเป็นว่า G จะต้องสามารถระบายสี k+1 สีแบบเท่าเทียมได้ ตัวอย่างเช่นกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{3,3}$ สามารถระบายสี 2 สีแบบเท่าเทียมแต่ไม่สามารถระบายสี 3 สีแบบเท่าเทียมได้ เราเรียกจำนวนเต็ม k ที่น้อยที่สุดซึ่ง G สามารถระบายสี k′ สีแบบเท่าเทียม สำหรับทุก $k' \geq k$ ว่า *เทรโชลด์ของรงคเลขแบบเท่าเทียม* (the equitable chromatic threshold) ของ G เขียนแทนด้วย $\chi_=^*(G)$

ข้อความคาดการณ์ EΔCC **:** กราฟเชื่อมโยง G สามารถระบายสี Δ(G) สีแบบเท่าเทียมสำหรับกราฟ G ซึ่งไม่ใช่กราฟแบบบริบูรณ์ K_m กราฟวงคี่ C_{2m+1} และกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{2m+1,2m+1}$ เมื่อ $m \geq 1$

เราได้ว่าข้อความคาดการณ์ EΔCC ครอบคลุมข้อความคาดการณ์ ECC เนื่องจากกราฟที่สอดคล้อง EΔCC จะต้องสอดคล้อง ECC ด้วย

บทนิยามเกี่ยวกับกราฟ

ในหัวข้อนี้ เราจะให้บทนิยามเกี่ยวกับประเภทของกราฟที่น่าสนใจ และมีผู้ศึกษาในการระบายสีแบบเท่าเทียม ซึ่งเราจะอ้างอิงในหัวข้อถัดไป ส่วนบทนิยามเกี่ยวกับประเภทของกราฟที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมใน (West, 1996)

บทนิยาม 1 *กราฟล้อซึ่งแบ่งก้านล้อ* (broken spoke wheel graph) เขียนแทนด้วย $G_n(n \geq 4)$ คือ กราฟที่ได้จากกราฟล้อ W_n ด้วยกระบวนการแบ่งย่อยก้านล้อ $\{u,c_i\}$ ทั้ง n-1 ก้าน เป็นเส้นเชื่อมสองเส้น คือ $\{u,v_i\}$ และ $\{v_i,c_i\}$

กราฟดาวหาง (comet graph, $c_{r,s}$) คือ กราฟที่มีจุดยอดจำนวน (r+s) จุด ($r,s \geq 1$) ซึ่งได้จากการเชื่อมกราฟดาว $K_{1,r}$ กับจุดปลายหนึ่งจุดของกราฟวิถี P_s

กราฟคลี่ (reel graph, R_n) คือ กราฟที่ได้จากกราฟวงคู่ C_{2n} ซึ่งมีจุดยอดคือ $u_0,u_1,\ldots,u_{2n-1}$ โดยเพิ่มจุดยอด v เชื่อมกับจุดยอด u_{2i} สำหรับ i = 1,2,...,n-1 และเชื่อมจุดยอด u_{2i-1} กับจุดยอด u_{2i+1} สำหรับ i = 1,2,...,n($u_{2n+1} = u_0$)

กราฟต้นไม้หลายเหลี่ยม (polygon tree) คือ กราฟซึ่งเป็นสมาชิกในประเภทของกราฟซึ่งนิยามโดยกระบวนการทำซ้ำดังนี้ (1) กราฟวงเป็นกราฟต้นไม้หลายเหลี่ยม (2) กราฟต้นไม้หลายเหลี่ยม G′ ได้จากกราฟต้นไม้หลายเหลี่ยม G ซึ่งเพิ่มกราฟวงซึ่งมีเส้นเชื่อมร่วมกันเพียงหนึ่งเส้นกับกราฟ G

บทนิยาม 2 *ผลคูณของกราฟ* (graph product) $G_1 * G_2$ ของกราฟ $G_1 = (V_1,E_1)$ และ $G_2 = (V_2,E_2)$ คือ กราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็น $V_1 x V_2$ และเซตเส้นเชื่อมแตกต่างกันไปตามชนิดของผลคูณ ดังนี้ *ผลคูณคาร์ทีเซียน* (Cartesian product) *ผลคูณเทนเซอร์อย่างอ่อน* (weak tensor product) และ*ผลคูณเทนเซอร์อย่างเข้ม* (strong tensor product) ของกราฟ G_1 และ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \square G_2$, $G_1 x G_2$ และ $G_1 \boxtimes G_2$ ตามลำดับ กำหนดให้ (i, j), (k, l) $\in V_1 x V_2$ แล้ว {(i, j), (k, l)} เป็นเส้นเชื่อมใน :

(i) $E(G_1 \square G_2)$ ก็ต่อเมื่อ i = k และ $\{i, l\} \in E_2$ หรือ j = l และ $\{i, k\} \in E_1$;

(ii) $E(G_1 x G_2)$ ก็ต่อเมื่อ $\{i, k\} \in E_1$ และ $\{j, l\} \in E_2$;

(iii) $E(G_1 \boxtimes G_2)$ ก็ต่อเมื่อ $\{(i, j), (k, l)\} \in E(G_1 \square G_2) \cup E(G_1 x G_2)$

ผลการศึกษาเกี่ยวกับข้อคาดการณ์ ECC และ EΔCC

เมเยอร์ (Meyer, 1973) ได้แสดงว่า ECC เป็นจริงสำหรับทุกกราฟซึ่งมีจุดยอดไม่เกิน 6 จุด และยาพและจาง (Yap & Zhang, 1997) ได้พิสูจน์ว่า ECC เป็นจริงสำหรับ*กราฟเชิงระนาบภายนอก* (outerplanar graph) ต่อมาภายหลังคอสโทชคา (Kostochka, 2002) ขยายผลลัพธ์ดังกล่าวโดยพิสูจน์ว่า สำหรับทุกกราฟเชิงระนาบภายนอกซึ่งมีระดับขั้นสูงสุดคือ Δ สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียมได้ สำหรับทุกค่า k ซึ่ง $k \geq 1 + \lceil \Delta/2 \rceil$ และได้แสดงว่าค่าขอบเขตนี้เป็นค่าที่ดีที่สุด นอกจากนี้ จางและยาพ (Zhang & Yap, 1998) ได้พิสูจน์ว่า ECC เป็นจริงสำหรับกราฟเชิงระนาบซึ่ง $\Delta(G) \geq 13$ ซึ่งต่อมาภายหลัง นาคประสิทธิ์ (Nakprasit, 2010) ได้พบข้อผิดพลาดในการพิสูจน์และแก้ไขข้อผิดพลาดดังกล่าว

นอกจากนี้ จางและยาพ (Zhang & Yap, 1998) ยังได้ตั้งคำถามเปิดว่า "จริงหรือไม่ว่า สำหรับกราฟเชิงระนาบภายนอก G ซึ่งมี $\Delta(G) \geq 3$ แล้ว $\chi_=(G) \leq \lceil \Delta(G)/2 \rceil + 1$?" ซึ่งต่อมาคอสโทชคา (Kostochka, 2002) ได้พิสูจน์ว่าข้อความนี้เป็นจริง

ลีและวู (Lih & Wu, 1996) แสดงว่า ECC เป็นจริงสำหรับทุก*กราฟสองส่วน* (bipartite graph) หวางและจาง (Wang & Zhang, 2000) ได้ขยายผลของ ECC ไปยัง*กราฟ r ส่วนแบบบริบูรณ์* (complete r-partite graph) $K(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ เมื่อ r>1 โดยแสดงว่า $\chi_=(K(n_1,n_2,\ldots,n_r)) \leq \Delta(K(n_1,n_2,\ldots,n_r))$ และยิ่งไปกว่านั้น ยังได้ว่า $\chi_=(K(n_1,n_2,\ldots,n_r)) = r$ ก็ต่อเมื่อ $||n_i|-|n_j|| \leq 1$ สำหรับทุก i และ j และในปี ค.ศ. 2001 แลมและคณะ (Lam *et al.*, 2001) ได้พิสูจน์ว่า $\chi_=(K(n_1,n_2,\ldots,n_r)) = \sum_{i=1}^{r} \lceil n_i/(M+1) \rceil$ เมื่อ M คือจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดซึ่ง $n_i \bmod M < \sum_{i=1}^{r} \lceil n_i/M \rceil$, i = 1,2,...,r

เฉินและคณะ (Chen *et al.*, 1994) แสดงว่า ECC เป็นจริงสำหรับกราฟเชื่อมโยงที่แต่ละจุดยอดมีระดับขั้นเท่ากับสาม และยังแสดงว่า ถ้า EΔCC เป็นจริงสำหรับทุก*กราฟปรกติซึ่งเชื่อมโยง* (connected regular graph) ที่มีระดับขั้น Δ (กราฟปรกติ คือ กราฟที่จุดยอดทุกจุดมีระดับขั้นเท่ากัน) แล้ว EΔCC จะเป็นจริงสำหรับทุกกราฟที่มีระดับขั้น Δ

ลีและวู (Lih & Wu, 1996) ได้แสดงว่า EΔCC เป็นจริงสำหรับกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ (complete bipartite graph) ซึ่งเชื่อมโยงและไม่อยู่ในรูปแบบ $K_{2m+1,2m+1}$ เมื่อ $m \geq 1$ นอกจากนี้ยังพิสูจน์ว่า กราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{n,n}$ สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียม ก็ต่อเมื่อ $\left\lceil \frac{n}{\lfloor k/2 \rfloor} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{\lceil k/2 \rceil} \right\rfloor \leq 1$ รวมทั้งได้ปรับปรุงขอบเขตของรงคเลขแบบเท่าเทียมสำหรับกราฟสองส่วนที่สอดคล้องเงื่อนไขเฉพาะของจำนวนเส้นเชื่อมดังนี้

ทฤษฎีบท 2 (Lih & Wu, 1996) ให้ G(X, Y) เป็นกราฟสองส่วน

ซึ่งเชื่อมโยงและมีเส้นเชื่อม m เส้น ถ้า $|X| = n_1 \geq n_2 = |Y|$ และ $m < \lfloor n_1/(n_2+1) \rfloor (n_1-n_2)+2n_1$ แล้ว $\chi_=(G) \leq \lceil n_1/(n_2+1) \rceil +1$

สังเกตว่าสำหรับ $m \geq 2$ ค่าขอบเขตของรงคเลขแบบเท่าเทียมที่ได้จากทฤษฎีบทนี้มีค่าน้อยกว่า $\Delta(G)$ และเนื่องจากกราฟต้นไม้เป็นกราฟสองส่วน $T(X,Y)$ เมื่อ $|X| = n_1$ และ $|Y| = n_2$ และมีเส้นเชื่อม n_1+n_2-1 ซึ่งน้อยกว่า $\lfloor n_1/(n_2+1) \rfloor (n_1-n_2)+2n_1$ ดังนั้น

$$\chi_=(T) \leq \left\lceil \frac{|X|+|Y|+1}{\min\{|X|+|Y|\}+1} \right\rceil$$

ยาพและจาง (Yap & Zhang, 1996) ได้แสดงว่า EΔCC เป็นจริงสำหรับทุกกราฟเชื่อมโยง G ซึ่ง $\Delta(G) \geq (|G|/3)+1$ ต่อมาเฉินและคณะ (Chen *et al*., 1994) ได้ใช้เทคนิคใน (Yap & Zhang, 1996) แสดงว่า EΔCC เป็นจริงสำหรับทุกกราฟปรกติ นอกจากนี้ยังพิสูจน์ว่า EΔCC เป็นจริง สำหรับทุกกราฟเชื่อมโยง G ซึ่ง $\Delta(G) \leq 3$ และทุกกราฟเชื่อมโยง G ซึ่ง $\Delta(G) \geq |G|/2$ ซึ่งไม่ใช่กราฟแบบบริบูรณ์ K_m และกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ $K_{2m+1,2m+1}$ สำหรับทุก $m \geq 1$

นอกจากนี้ยังมีผลการศึกษาเกี่ยวกับประเภทของกราฟซึ่งสอดคล้องกับ EΔCC อีกเป็นจำนวนมาก เช่น กราฟเส้น (line graph) (ดู (Wang & Zhang, 2000)) กราฟช่วง (interval graph) (ดู (Chen *et al*., 1998)) กราฟเชิงระนาบ (ปรับปรุงเงื่อนไขให้ดีขึ้น) (ดู (Zhang & Yap, 1998), (Wu & Wang, 2008), (Zhu & Bu, 2008)) กราฟ k-ดีเจนเนอเรท (k-degenerate graph) (ดู (Kostochka & Nakprasit, 2003), (Kostochka *et al*., 2005)) ผลคูณของกราฟ (product graph) ประเภทต่างๆ และกราฟที่ได้จากการดำเนินการทางกราฟ (ดู (Chen *et al*., 1998), (Furmanczyk, 2006), (Lih & Chang, 2010)) เป็นต้น

ผลการศึกษาอื่นๆ เกี่ยวกับการระบายสีแบบเท่าเทียม

นอกจากจะมีผู้ศึกษาหาประเภทของกราฟที่สอดคล้องกับ ECC และ EΔCC แล้ว ยังมีงานวิจัยเกี่ยวกับค่า $\chi_=(G)$ และค่า $\chi^*_=(G)$ ในกราฟ G บางประเภท ซึ่งในกราฟบางประเภทอาจได้ค่าแม่นตรง แต่ในกราฟบางประเภทอาจได้เพียงค่าขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของค่าดังกล่าวเท่านั้น

เฉินและลี (Chen & Lih, 1994) ได้แสดงว่าสำหรับกราฟต้นไม้ไม่ชัด $T = T(X,Y)$ แล้ว $\chi_=(T) = \chi^*_=(T)$ และ

$$\chi_=(T(X, Y)) = \begin{cases} 2 & ; ||X|-|Y|| \leq 1 \\ \max\left\{3, \max\limits_{v \in X \cup Y} \lceil (n+1)/(\alpha(T - N[v]) + 2) \rceil \right\} & ; ||X|-|Y|| > 1 \end{cases} \quad \text{........ (1)}$$

นอกจากนี้สำหรับกรณีเฉพาะของกราฟต้นไม้ เช่น *กราฟวิถี* (path graph) *กราฟดาว* (star graph) *กราฟดาวหาง* (comet graph) สามารถหารงคเลขแบบเท่าเทียมได้ดังนี้ สำหรับกราฟวิถีที่มี n จุด ($n \geq 2$) เขียนแทนด้วย P_n เราได้ว่า $\chi_=(P_n) = 2$ สำหรับกราฟดาวที่มี n+1 จุด ($n \geq 1$) เขียนแทนด้วย $K_{1,n}$ เราได้ว่า $\chi_=(K_{1,n}) = \lceil n/2 \rceil +1$ และสำหรับกราฟดาวหาง เราได้ว่า

$$\chi_=(C_{r,s}) = \begin{cases} 2 & ; (r = 2, s = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}^+) \vee (r = 1) \\ \max\left\{3, \lceil (r+s+2)/(\lceil (s-1)/2 \rceil + 2) \rceil \right\} & ; (r = 2, s = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}^+) \vee (r > 2) \end{cases} \quad \text{............(2)}$$

เมื่อพิจารณากราฟวงที่มีจุดยอด n จุด ($n \geq 3$) เขียนแทนด้วย C_n ซึ่งเป็นกราฟปรกติที่มีระดับขั้นเท่ากับสอง สามารถเห็นได้ชัดว่า $\chi_=(C_n) = 2$ เมื่อ n เป็นเลขคู่ และ $\chi_=(C_n) = 3$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

ฟิดีเทคและคณะ (Fidytek *et al*., 2009) ได้ศึกษาการระบายสีแบบเท่าเทียมใน*กราฟคนีเซอร์* (Kneser graph) เขียนแทนด้วย KG(n,k) เมื่อ $n \geq k \geq 1$ และแสดงว่าสำหรับทุกค่า k ที่กำหนดให้แล้ว $\chi_=(KG(n, k) = n-k+1$ สำหรับทุกค่า n ที่ใหญ่ เพียงพอ

เพื่อให้ง่ายต่อการอ้างอิง เราสรุปผลการศึกษาเกี่ยวกับรงคเลขแบบเท่าเทียมไว้ในตารางที่ 1

ผลการศึกษาการระบายสีแบบเท่าเทียมในผลคูณของกราฟบางประเภท

เฉินและคณะ (Chen *et al*., 1998) ได้ศึกษาการระบายสีแบบเท่าเทียมในผลคูณคาร์ทีเซียน ได้ผลการศึกษาที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. ถ้า G_1 และ G_2 สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียม แล้ว $G_1 \square G_2$ สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียม ทำให้ได้ว่า $\chi^*_=(G_1 \square G_2) \leq \max\{\chi^*_=(G_1), \chi^*_=(G_2)\} \leq \max\{\Delta(G_1)+1, \Delta(G_2)+1\}$

ยิ่งไปกว่านั้น เราได้ว่า ถ้า G_1 และ G_2 เป็นกราฟที่มีเส้นเชื่อมอย่างน้อยหนึ่งเส้นแล้ว EΔCC เป็นจริงสำหรับกราฟ $G_1 \square G_2$

ข้อสังเกต : ก) ข้อความนี้ไม่สามารถแทนที่ด้วยเครื่องหมายเท่ากับได้ เช่น ถ้า $G_1 = K_{1,3}$ และ $G_2 = P_2$ $\chi^*_=(K_{1,3}) = 3$ และ $\chi^*_=(P_2) = 2$ แต่ $\chi^*_=(K_{1,3} \square P_2) = 2 < \max\{\chi^*_=(K_{1,3}), \chi^*_=(P_2)\} = 3$

ข) เราไม่สามารถลดเงื่อนไขเพียงพอได้ เช่น ถ้า $G_1 = K_{1,5}$

ตารางที่ 1 รงคเลขและรงคเลขแบบเท่าเทียมของบางคลาสของกราฟ

คลาสของกราฟ (G)	รงคเลขของกราฟ ($\chi(G)$)	รงคเลขแบบเท่าเทียม ($\chi_=(G)$)
กราฟวิถี (P_n)	$\begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ 2 & ; n \geq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ 2 & ; n \geq 2 \end{cases}$
กราฟแบบบริบูรณ์ (K_n)	n	n
กราฟดาว ($K_{1,n}$)	2	$\lceil n/2 \rceil + 1$
กราฟลูกบาศก์ n มิติ (Q_n)	2	2
กราฟวงคู่ (C_{2n}, $n\geq 2$) กราฟวงคี่ (C_{2n+1}, $n\geq 1$)	2 3	2 3
กราฟล้อคู่ (W_{2n}, $n\geq 2$) กราฟล้อคี่ (W_{2n+1}, $n\geq 1$)	3 4	$\lceil (n-1)/2 \rceil +1$
กราฟล้อซึ่งแบ่งก้านล้อ (G_n, $n\geq 4$)	3	$\begin{cases} 3 & ; n \leq 7 \\ 4 & ; n > 7 \end{cases}$
กราฟต้นไม้ (T(X,Y))	2	สมการ (1)
กราฟต้นไม้ทวิภาค (T_t)	2	min {3,t}
กราฟต้นไม้หลายเหลี่ยมสองส่วน	2	2
กราฟต้นไม้หลายเหลี่ยมซึ่งไม่มี C_3	3	3
กราฟดาวหาง ($C_{r,s}$)	2	สมการ (2)
กราฟแบบแบ่งแยกแบบบริบูรณ์ (complete split graph, K_n+N_r)	n+1	$n+\lceil r/2 \rceil$
กราฟคลี่คู่ (reel, R_{2n}, $n\geq 2$) กราฟคลี่คี่ (reel, R_{2n+1}, $n\geq 1$)	3 4	$\begin{cases} 3 & ; n = 2,4 \\ 4 & ; n \neq 2,4 \end{cases}$ 4

และ $G_2 = P_3$ ซึ่ง $\chi(K_{1,5}) = \chi^*_=(P_3) = 2$ แต่ $K_{1,5}\square P_3$ ไม่สามารถระบายสี 2 สีแบบเท่าเทียมได้

2. กำหนดให้ $G = G_1\square G_2\square\cdots\square G_n$ เมื่อแต่ละ G_i เป็นกราฟวิถี กราฟวง กราฟลูกบาศก์ n มิติ หรือกราฟแบบบริบูรณ์ แล้ว $\chi(G) = \chi_=(G) = \chi^*_=(G) = \max\{\chi(G_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$

3. ถ้า G_1 มีจุดยอด n จุดและ G_2 สามารถระบายสี n สี แล้ว $G_1\square G_2$ สามารถระบายสี n สีแบบเท่าเทียม

เฟอร์มานซิค (Furmanczyk, 2006) ได้ศึกษาการระบายสีแบบเท่าเทียมในผลคูณคาร์ทีเซียนเพิ่มเติม มีผลการศึกษาดังนี้

1. ให้ $G_1(V_1,V_2)$ และ $G_2(V_1',V_2')$ เป็นกราฟสองส่วนซึ่งอย่างน้อยหนึ่งกราฟมีเส้นเชื่อม และ $|V_1'| = |V_2'|$ แล้ว $\chi_=(G_1\square G_2) = 2$ ซึ่งจากผลลัพธ์นี้ เราได้ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก k,m,n และ r ค่ารงคเลขแบบเท่าเทียมในกราฟต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ 2 : $C_{2m}\square C_{2n}$, $P_m\square C_{2n}$, $Q_r\square C_{2n}$, $K_{k,m}\square C_{2n}$, $K_{1,m}\square C_{2n}$, $P_m\square P_{2n}$, $Q_r\square P_{2n}$, $K_{k,m}\square P_{2n}$, $K_{1,m}\square P_{2n}$, $Q_r\square Q_r$

2. $\chi_=(K_{1,m}\square P_n) = 3$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง m, $n\geq 3$ และ n เป็นจำนวนคี่

นอกจากนี้ เฉินและคณะ (Chen *et al.*, 1998) ได้ศึกษาการระบายสีแบบเท่าเทียมในผลคูณแทนเซอร์อย่างอ่อน ได้ผลการศึกษาที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. $\chi_=(G_1 x G_2) \leq \min\{|V_1| , |V_2|\}$ และสิ่งที่ได้ตามมาคือ $\chi_=(K_m x K_n) = \min\{m,n\}$

ข้อสังเกต : ก) ถึงแม้ว่า G_1 และ G_2 สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียม แต่ $G_1 x G_2$ อาจไม่สามารถระบายสี k สีแบบเท่าเทียมได้ เช่น

$G_1 = K_{m,m-1}$ และ $G_2 = K_{n,n-1}$ ซึ่ง $K_{m,m-1}$ และ $K_{n,n-1}$ สามารถระบายสี 2 สีแบบเท่าเทียม แต่ $K_{m,m-1} \times K_{n,n-1}$ เป็นการยูเนียนแบบไม่ซ้อนทับกันของ $K_{mn,(m-1)(n-1)}$ และ $K_{(m-1)n,m(n-1)}$ ซึ่งมีเซตอิสระสองเซตที่มีจำนวนจุดยอดต่างกัน 2mn-m-n จุด จึงไม่สามารถระบายสี 2 สีแบบเท่าเทียมได้

ข) $\chi_=(K_n x K_{n,n-1}) = \chi^*_=(K_n x K_{n,n-1}) = n$

2. $\chi_=(C_m x C_n) = \chi^*_=(C_m x C_n) = \begin{cases} 2 ; mn = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}^+ \\ 3 ; mn = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

ยิ่งไปกว่านั้น เฟอร์มานซิค (Furmanczyk, 2006) ได้ศึกษาการระบายสีแบบเท่าเทียมในผลคูณแทนเซอร์อย่างอ่อนและผลคูณเทนเซอร์อย่างเข้ม ได้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจดังนี้

1. กำหนดให้ G และ H เป็นกราฟซึ่งมีเส้นเชื่อม และ $G = (V_1 \cup V_2, E)$ เป็นกราฟสองส่วนซึ่ง $|V_1| = |V_2|$ แล้ว $\chi_=(GxH) = 2$ ซึ่งจากผลลัพธ์นี้ เราได้ว่า สำหรับกราฟ H ซึ่งมีเส้นเชื่อม และจำนวนเต็มบวก k,m,d ค่ารงคเลขแบบเท่าเทียมในกราฟต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ 2 : $C_{2k}xH$, $P_{2k}xH$, Q_dxH, $K_{m,m}xH$

2. $\chi_=(K_{1,m}xK_{1,n}) = \dfrac{(m+1)(n+1)}{\max\{m,n\}+1} = \min\{m,n\}+1$ เมื่อ $m,n \in \mathbb{Z}^+$

3. $\chi_=(P_m x K_n) = \begin{cases} 2 & ; (m = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}^+), (n=2) \\ 3 & ; (m = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}^+), (n \neq 2) \end{cases}$
เมื่อ $m,n \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง $m,n>1$

4. $\chi_=(P_m x P_n) = 3$ เมื่อ $m,n \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

5. $\chi_=(K_{1,m} x P_n) = \begin{cases} 2 & ; (m = 1), (n = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}^+) \\ 3 & ; (m \geq 1) \vee (n = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}^+) \end{cases}$
เมื่อ $m,n \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง $n \geq 2$

6. $\chi_=(P_m \boxtimes P_n) = \begin{cases} 4 & ; nm = 2k, \exists k \in \mathbb{Z}^+ \\ 5 & ; nm = 2k+1, \exists k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

7. $\chi_=(C_{5(2l_1+1)} \boxtimes C_{2l_2+1}) = 5$ เมื่อ $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง $l_1 \geq 0$ และ $l_2 \geq 2$

ปัญหาเปิดเกี่ยวกับการระบายสีแบบเท่าเทียม

ในหัวข้อนี้ เราจะนำเสนอปัญหาเปิดสำหรับการระบายสีแบบเท่าเทียมที่น่าสนใจ ดังต่อไปนี้

1. หาประเภทของกราฟซึ่งสอดคล้องข้อความคาดการณ์ ECC และ EΔCC

2. หาค่าแม่นตรงหรือค่าขอบเขตของ $\chi_=(G)$ และ $\chi^*_=(G)$ ในกราฟ G บางประเภท

3. หาค่ารงคเลขแบบเท่าเทียม/เทรโชลด์ของรงคเลขแบบเท่าเทียมในผลคูณของกราฟประเภทต่างๆ

4. หาความสัมพันธ์ของรงคเลขแบบเท่าเทียม/เทรโชลด์ของรงคเลขแบบเท่าเทียมในผลคูณของกราฟประเภทต่างๆ กับตัวประกอบของผลคูณ เช่น $K_m x K_n$, $K_{m,m-1} x K_{n,n-1}$ เป็นต้น

5. หาเงื่อนไขจำเป็นที่ทำให้ผลคูณของ $G_1 * G_2$ สามารถระบายสี $\max\{k_1,k_2\}$ สีแบบเท่าเทียมได้ ถ้า G_1 และ G_2 สามารถระบายสี k_1 และ k_2 สี (หรือ k_1 และ k_2 สีแบบเท่าเทียม) ตามลำดับ

เอกสารอ้างอิง

Bollobas, B. & Guy, R. K. (1983). Equitable and proportional coloring of trees, *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 34*, 177–186.

Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 37*, 194–197.

Chen, B.-L. & Lih, K.-W. (1994). Equitable coloring of trees, *Journal of Combinatorial Theory, Series B, 61*, 83–87.

Chen, B.-L., Lih, K.-W.,& Wu, P.-L. (1994). Equitable colouring and the maximum degree, *European Journal of Combinatorics, 15*, 443–447.

Chen, B.-L., Lih K.-W., & Yan, J.-H. (1998). Equitable coloring of interval graphs and products of graphs, *manuscript*.

Fidytek, R., Furmanczyk, H., & Zylinski, P. (2009). Equitable coloring of Kneser graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory, 29*(1), 119–142.

Furmanczyk, H. (2006). Equitable coloring of graph products, *Opuscula mathematica*, Vol 26, No. 1, 31–44.

Guy, R. K. (1975). Monthly research problems, 1969-1975, *American Mathematical Monthly, 82*, 995–1004.

Hajnal, A. & Szemeredi, E. (1970). Proof of conjecture of Erdös, in: Renyi A. and Sos, V. T. editors., *Combinatorial Theory and Its Applications*, Vol. II, Colloquium of Mathematics Society Janos Bolyai 4 (North- Holland, Amsterdam), 601–623.

Jensen, T. R. & Toft, B. (1995). *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons, New York.

Kierstead, H. A. & Kostochka, A. V. (2008). A short proof of the Hajnal-Szemeredi Theorem on equitable colouring, *Combinatorics Probability & Computing, 17*, 265–270.

Kostochka, A. V. (2002). Equitable colorings of outerplanar graphs, *Discrete Mathematics, 258*, 373–377.

Kostochka, A. V. & Nakprasit, K. (2003). Equitable colorings of k-degenerate graphs, *Combinatorics Probability & Computing, 12*, 53–60.

Kostochka, A. V., Nakprasit, K. & Pemmaraju, S.V. (2005). On equitable coloring of d-degenerate graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics, 19*(1), 83–95.

Lam, P. C. B. et al. (2001). On the equitable chromatic number of complete n-partite graphs, *Discrete Applied Mathematics, 113*, 307–310.

Lih, K.-W. & Wu, P. L. (1996). On equitable coloring of bipartite graphs, *Discrete Mathematics, 151*, 155–160.

Lih, W.-H. & Chang, G. J. (2010). Equitable colorings of Kronecker products of graphs, *Discrete Applied Mathematics, 158*, 1816–1826.

Meyer, W. (1973). Equitable coloring, *American Mathematical Monthly, 80*, 920–922.

Nakprasit, K. (2010). Invalid proof on equitable colorings of planar graphs, *submitted*.

Tucker, A. C. (1973). Perfect graphs and an application to optimizing municipal services, *SIAM Review, 1*, 585–590.

Wang, W. and Zhang, K. (2000). Equitable colorings of line graphs and complete r-partite graphs, *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, Vol. 13, 190–194.

West, D. B. (1996). *Introduction to graph theory*. Illinois: Prentice-Hall.

Wu, J.& Wang, P. (2008). Equitable coloring planar graphs with large girth, *Discrete Mathematics, 308*, 985–990.

Yap, H.-P. & Zhang, Y. (1997). The equitable Δ-colouring conjecture holds for outerplanar graphs, *Bulletin of the Institue of Mathematics Acadamia Sinica, 25*, 143–149.

Yap, H.-P. & Zhang, Y. (1996). On equitable colouring of graphs, *manuscript*.

Zhang, Y. & Yap, H.-P. (1998). Equitable colourings of planar graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 27*, 97–105.

Zhu, J. & Bu, Y. (2008). Equitable list colorings of planar graphs without short cycles, *Theoretical Computer Science, 407*, 21–28.