การสร้างตัวแบบเพื่อพยากรณ์ประสิทธิภาพของหอทำน้ำเย็นชนิดลมดูดแบบไหลสวนทางโดยใช้วิธี GEE

A Model for Prediction of Efficiency of Induced Draft Counterflow Cooling Tower Using Generalized Estimating Equations

รุ้งรวี อำนาจตระกูล* และลี่ลี อิงศรีสว่าง
ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
Rungrawee Amnarttrakul* and Lily Ingsrisawang
Department of Statistics, Faculty of Science, Kasetsart University.

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างตัวแบบในการพยากรณ์อุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นกับปัจจัยต่างๆ ได้แก่ อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ (°C) อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ (°C) อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น (°C) และอัตราการไหลของน้ำร้อน (l/min) ลักษณะของข้อมูลมีการวัดซ้ำ ประกอบด้วย 52 การทดลอง และทำการวัดค่าซ้ำ 12 ครั้งในแต่ละการทดลอง มีทั้งหมด 624 ค่าสังเกต โดยมุ่งเน้นที่จะศึกษาถึงภาพรวมของประสิทธิภาพการทำงานของหอทำน้ำเย็น จากการสร้างตัวแบบในการพยากรณ์โดยใช้วิธี GEE ที่ใช้ฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบ Identity Link และโครงสร้างสหสัมพันธ์แบบ Exchangeable Correlation พบว่า อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราการไหลของน้ำร้อน มีผลต่ออุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็น ตัวแบบในการพยากรณ์ที่ได้สามารถนำมาอธิบายความผันแปรของอุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นได้ถึง 77.41% เมื่อพิจารณาค่า Mean Deviance = 0.83 แสดงให้เห็นว่าตัวแบบในการพยากรณ์มีความเหมาะสม โดยสอดคล้องกับการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบเมื่อทำการพิจารณาจากค่าตกค้าง

คำสำคัญ : ประสิทธิภาพของหอทำน้ำเย็น วิธี GEE การวัดค่าซ้ำ Exchangeable Correlation

***Corresponding author.** E-mail: g4984008@ku.ac.th

Abstract

The objective of this research was to build the model for forecasting the outlet water temperature (°C) from induced draft counterflow cooling tower water affected by various factors, including wet bulb temperature of air (°C), dry bulb temperature of air (°C), inlet water temperature (°C), and hot water flow rate (l/min). The data sets included 52 tests and each test was repeated 12 times, so there were 624 observations. The repeated measures were correlated within each test. The research focused on the overall efficiency of the cooling tower water. The analysis of the data with repeated measures was accomplished through the use of generalized estimating equations (GEE) method. The first step was to test the distribution of the response variable. It was found that the distribution was normal distribution. The second step involved a specification of link function. The basic link function was the identity link function, and it was used for normally distributed data. Finally, the correlation structure was defined. The most suitable structure was the exchangeable correlation. The model showed that the wet bulb temperature of air, dry bulb temperature of air, inlet water temperature, and hot water flow rate affected the outlet water temperature. The variation of outlet water temperature could be explained up to 77.41%. The mean deviance showed that the model was appropriate, and the residuals from model indicated that no problems with the normal distribution and the constant variance.

Keywords : efficiency of cooling tower, Generalized Estimating Equations, repeated measurements, Exchangeable Correlation

บทนำ

ในปัจจุบันไม่ว่าจะเป็นอุตสาหกรรมที่ผลิตสินค้าอุปโภคหรือบริโภคล้วนแล้วแต่มีความจำเป็นในการใช้น้ำในอุตสาหกรรม ซึ่งในบางครั้งอาจจะต้องมีการนำน้ำที่ใช้แล้วหมุนเวียนกลับมาใช้หรืออาจจะทิ้งออกไปจากระบบ ไม่ว่าจะจัดการกับน้ำที่ใช้แล้วในลักษณะใดก็ตาม สิ่งหนึ่งที่ควรคำนึงถึงก็คือ คุณภาพของน้ำเหล่านี้ ในเรื่องของสารเจือปน ความเป็นกรดเป็นด่าง หรือแม้แต่อุณหภูมิของน้ำก็เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อปัญหาสิ่งแวดล้อม ล้วนแล้วแต่ถือว่าเป็นมลภาวะทางสิ่งแวดล้อม สำหรับมลภาวะทางความร้อนนั้นเป็นปัจจัยสำคัญปัจจัยหนึ่งที่ทำให้ให้เกิดปัญหาด้านสิ่งแวดล้อม และส่วนใหญ่จะเป็นความร้อนจากขบวนการทางอุตสาหกรรม (สุระเดช ฉั่วสุวรรณ, 2540) ซึ่งคนโดยทั่วไปอาจจะมองข้ามในประเด็นนี้ โดยอาจจะมีคำถามว่า “อุณหภูมิของน้ำมีผลต่อสิ่งแวดล้อมอย่างไร” ในทางปฏิบัติแล้วก่อนที่จะนำน้ำเหล่านี้กลับไปใช้อีก หรือปล่อยออกจากขบวนการทางอุตสาหกรรม ควรจะต้องมีการปรับอุณหภูมิของน้ำให้เย็นลง เพื่อไม่เป็นอันตรายต่อสิ่งมีชีวิตในน้ำ หรือพร้อมที่จะถูกนำกลับไปหมุนเวียนกลับไปใช้ได้อีกในอุณหภูมิที่เหมาะสม วิธีการในภาคอุตสาหกรรมที่จะปรับอุณหภูมิของน้ำให้เย็นลงสามารถทำได้โดยใช้หอทำน้ำเย็น (Cooling Tower) ซึ่งเป็นอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างน้ำและอากาศชนิดหนึ่ง โดยมีหลักการง่ายๆ คือ นำน้ำที่มีอุณหภูมิสูงปล่อยลงมาจากด้านบนของหอทำน้ำเย็นไหลผ่านแผงกระจายละอองน้ำลงอย่างช้าๆ ในขณะเดียวกันพัดลมก็จะดูดอากาศจากทางด้านล่างสวนทิศทางกันกับทิศทางการไหลของน้ำ ทำให้ความร้อนที่มีอยู่ในน้ำถ่ายเทสู่อากาศด้วยการระเหย เป็นผลทำให้น้ำมีอุณหภูมิลดลงแล้วนำไปใช้ต่อไป อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพของหอทำน้ำเย็นจะขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น อัตราการไหลของน้ำ อัตราการไหลของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ (Gurney & Cotter, 1966) เป็นต้น ซึ่งค่าของประสิทธิภาพนี้จะพิจารณาจากค่าอุณหภูมิของน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นนั่นเอง การศึกษาถึงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นกับปัจจัยที่เกี่ยวข้องนั้น สามารถนำวิธีการทางสถิติมาช่วยในการสร้างตัวแบบได้ เช่น วิธี Generalized Linear Model หรือ GLM ซึ่งเป็นวิธีการสร้างตัวแบบความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรตอบสนอง (Response Variable) และตัวแปรร่วม (Covariates) แต่วิธีนี้จะเหมาะกับในกรณีที่ข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างกัน หรือข้อมูลที่ไม่มีการวัดค่าซ้ำ (Repeated Measurement) แต่เมื่อใดก็ตามที่ข้อมูลอยู่ในกลุ่มเดียวกันแล้วจะมีความสัมพันธ์ระหว่างกัน ซึ่งเป็นลักษณะข้อมูลที่เก็บเป็นกลุ่ม (Cluster) หรือข้อมูลระยะยาว (Longitudinal Data) ที่มีการวัดค่าซ้ำ ควรที่จะใช้วิธี Generalized Estimating Equation หรือ GEE มาวิเคราะห์ ซึ่งเป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ขยายมาจากวิธี GLM นั่นเอง (Stillman, 2003) ดังในงานวิจัย Liang และ Zeger (1986) กล่าวว่า การวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี GLM จะมีผลทำให้รูปแบบความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นภายใต้ข้อสมมติว่าความสัมพันธ์ภายในกลุ่มของตัวแปรตอบสนองเป็นอิสระต่อกันนั้นมีรูปแบบไม่เหมาะสม ซึ่งพบว่าการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี GEE เมื่อความสัมพันธ์ภายในกลุ่มของตัวแปรตอบสนองไม่เป็นอิสระต่อกัน จะให้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีคุณสมบัติคงเส้นคงวา (Consistent Estimator) สำหรับข้อมูลที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้เป็นข้อมูลจากการทดลองในงานวิจัยของพันธุ์ศักดิ์ (2545) โดยใช้ตัวแปรที่ได้จากการทดลองและมีการวัดค่าซ้ำในแต่ละการทดลอง 12 การทดลอง มาทำการหาตัวแบบในการพยากรณ์ด้วยวิธี GLM มีผลทำให้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ได้ขาดคุณสมบัติคงเส้นคงวา เนื่องจากไม่ได้คำนึงถึงการวัดค่าซ้ำ ผู้วิจัยจึงได้ทำการหาตัวแบบใหม่โดยศึกษาความสัมพันธ์ของอุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นกับตัวแปรที่มีข้อมูลปรากฏ ได้แก่ อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราการไหลของน้ำ มาสร้างตัวแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ โดยใช้วิธี GEE ซึ่งเป็นวิธีที่ยังไม่ค่อยนิยมนำมาใช้กันมากนัก และเป็นวิธีที่ต่างไปจากงานวิจัยของพันธุ์ศักดิ์ (2545) เพื่อนำผลที่ได้ไปใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานในการศึกษาเพื่อปรับอุณหภูมิของน้ำที่ใช้ในภาคอุตสาหกรรม โดยไม่เป็นปัญหาต่อสิ่งแวดล้อม ทั้งยังสามารถใช้ตัวแบบมาพยากรณ์อุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นเพื่อพิจารณาถึงประสิทธิภาพในการพัฒนาหรือปรับปรุงหอทำน้ำเย็นได้ในอนาคต สำหรับตัวอย่างงานวิจัยที่ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับหอทำน้ำเย็นโดยวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีทางสถิติ ได้แก่ Whillier (1977) ได้ศึกษาเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์อัตราส่วนของน้ำและอากาศ รวมทั้งทำการหาค่า correlation factor อีกด้วย Meytsar (1978) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของขนาดพัดลม และปริมาณอากาศที่ไหลผ่านหอทำน้ำเย็น และ Soylemez (1993) ได้ศึกษาวิธีการประมาณขนาดและประสิทธิภาพของหอทำน้ำเย็นโดยใช้แผนแบบการทดลอง เป็นต้น

วัสดุอุปกรณ์และวิธีการวิจัย

สำหรับข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์เป็นข้อมูลทุติยภูมิ (Secondary Data) ที่ได้บันทึกไว้ในงานวิจัยของพันธุ์ศักดิ์ (2545) เพื่อทดลองประสิทธิภาพของหอทำน้ำเย็นขนาด 3 ตันความเย็น โดยการเติมน้ำเข้าระบบที่ถังเก็บน้ำเย็น ถังน้ำอุ่น ประมาณ 160 ลิตร

และเติมที่ถังทำความร้อนประมาณ 170 ลิตร จากนั้นปรับตั้งค่าอุณหภูมิน้ำร้อนในถังทำความร้อนให้มีอุณหภูมิประมาณ 40 องศาเซลเซียส และปรับตั้งค่าอัตราการไหลของน้ำตามที่กำหนดไว้ 5 ระดับ คือ 29.676, 34.654, 39.002, 44.739 และ 49.818 l/m ปล่อยให้ระบบทำงานจนเข้าสู่สภาวะคงที่ (Stable Condition) ประมาณ 2 ชั่วโมง และทำการวัดค่าซ้ำจำนวน 12 ครั้ง กำหนดการทดลองไว้จำนวน 52 การทดลอง ดังนั้นจำนวนข้อมูลทั้งหมดมี 624 ค่าสังเกต ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษามีดังนี้

ตัวแปรตอบสนอง คือ

Y แทนอุณหภูมิน้ำออกจากหอทำน้ำเย็น (°C)

ตัวแปรร่วม 4 ตัว ประกอบด้วย

X_1 แทนอุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ (°C)

X_2 แทนอุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ (°C)

X_3 แทนอุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น (°C)

X_4 แทนอัตราไหลของน้ำ (l/min)

การสร้างตัวแบบในการพยากรณ์ระหว่างตัวแปรตอบสนองกับตัวแปรร่วมต่างๆ จะใช้วิธี GEE เนื่องจากลักษณะของข้อมูลที่ทำการเก็บรวบรวมมีการวัดค่าซ้ำในแต่ละการทดลอง โดยข้อมูลที่มีการวัดค่าซ้ำจะมีความสัมพันธ์ภายในแต่ละการทดลอง และการศึกษาครั้งนี้มุ่งเน้นที่จะศึกษาถึงภาพรวมของประสิทธิภาพการทำงานของหอทำน้ำเย็น เป็นการสนใจศึกษาถึง Population Average Model หรือ Marginal Model โดยเป็นการศึกษาตัวแบบในภาพรวมของการทดลอง ซึ่งไม่ใช่ตัวแบบที่ใช้พยากรณ์แบ่งแยกในแต่ละการทดลอง

โดยวิธี GEE เป็นวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลที่เสนอโดย (Liang & Zeger, 1986) ซึ่งใช้วิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บรวบรวมระยะยาวที่มีการวัดค่าซ้ำให้สะดวกมากขึ้น (Ballinger, 2004) โดยพบว่าข้อมูลที่มีการเก็บรวบรวมเป็นกลุ่ม หรือข้อมูลระยะยาวที่มีการวัดค่าซ้ำนั้นจะมีความสัมพันธ์ภายในกลุ่ม (Correlated within Clusters) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์จะทำได้โดยใช้วิธี Quasi-Likelihood ซึ่งทำให้ได้ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีประสิทธิภาพสูงกว่าการวิเคราะห์ข้อมูลโดยวิธี GLM ภายใต้วิธีการประมาณค่าแบบภาวะความน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) ที่มีข้อสมมติว่าความสัมพันธ์ภายในกลุ่มของตัวแปรตอบสนองเป็นอิสระต่อกัน การวิเคราะห์ข้อมูลโดยไม่คำนึงถึงความสัมพันธ์ภายในกลุ่มตัวแปรตอบสนองนั้น จะทำให้การอ้างอิงไม่ถูกต้อง วิธี GEE ถูกนำไปใช้วิเคราะห์ข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ภายในกลุ่มของตัวแปรตอบสนอง ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาทางชีววิทยา การเกษตร หรืออุตสาหกรรม (Myers, Montgomery & Vining, 2002) โดย Harrison และ Hulin (1989) ยังชี้ให้เห็นว่าวิธี GEE ถือว่าเป็นเครื่องมือการวิเคราะห์ข้อมูลที่ดีสำหรับการวิจัย เนื่องจากเป็นวิธีที่มีความยืดหยุ่นและสามารถใช้ได้กับข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ภายในกลุ่มตัวแปรตอบสนองที่ไม่มีการแจกแจงแบบปกติได้

สำหรับวิธี Quasi-Likelihood เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Wedderburn (1974) เนื่องจากวิธีการประมาณค่าแบบภาวะความน่าจะเป็นสูงสุดจะต้องมีการกำหนดรูปแบบการแจกแจงที่แท้จริงของข้อมูล แต่สำหรับวิธี Quasi-Likelihood ต้องการทราบเพียงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยของข้อมูล (Outcome Mean) กับตัวแปรร่วม (Covariate) หรือฟังก์ชันเชื่อมโยง (Link Function) แต่วิธี GEE จำเป็นต้องมีการกำหนดโครงสร้างสหสัมพันธ์ (Correlation Structure) ของตัวแปรร่วมแต่ละคู่ร่วมด้วย ซึ่งพบว่าเมื่อทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยไม่คำนึงถึงโครงสร้างสหสัมพันธ์จะทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้ไม่ถูกต้อง และจะส่งผลต่อค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) ผิดพลาด (Liang & Zeger, 1986) โดยสรุปแล้วการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสร้างตัวแบบในการพยากรณ์โดยใช้วิธี GEE ระหว่างตัวแปรตอบสนองกับตัวแปรร่วมจะต้องกำหนด 3 สิ่งประกอบกัน ได้แก่ ฟังก์ชันเชื่อมโยงการแจกแจงของตัวแปรตอบสนอง และโครงสร้างสหสัมพันธ์ (Ballinger, 2004)

การกำหนดฟังก์ชันเชื่อมโยง ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการแปลงค่าเฉลี่ยของข้อมูลให้อยู่ในรูปของตัวแปรพยากรณ์เชิงเส้น (Linear Predictor) (McCullagh & Nelder, 1989) สำหรับการเลือกฟังก์ชันเชื่อมโยงนั้นจะมีกำหนดลักษณะของฟังก์ชันเชื่อมโยงที่เป็นแบบบัญญัติ (Canonical Link) ได้แก่ Identity Link ซึ่งจะใช้กับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติ หรือ Logit Link จะถูกนำมาใช้กับข้อมูลที่มีลักษณะเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งเรียกว่า ข้อมูลทวิภาค (Binary Data) และ Log Link จะเหมาะสำหรับข้อมูลจำนวนนับ (Count Data) หรือการแจกแจงแบบปัวซงส์ (Poisson Distribution) อย่างไรก็ตามในการเลือกฟังก์ชันเชื่อมโยงอาจจะทำการเปลี่ยนแปลงโดยใช้ฟังก์ชันเชื่อมโยงลักษณะอื่นก็ได้ (Ballinger, 2004)

เมื่อพิจารณาถึงการแจกแจงของตัวแปรตอบสนองไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธี GEE หรือวิธี GLM ควรจะต้องกำหนดให้เหมาะสม เพื่อที่จะทำให้การแปลความหมายของค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยได้ถูกต้อง (McCullagh & Nelder, 1989) ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดการแจกแจงแบบปัวซงส์ให้กับข้อมูลที่มีลักษณะเป็นข้อมูลทวิภาค ก็จะทำให้การอนุมานของค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยผิดพลาดไปด้วย ซึ่งถ้าข้อมูลมีลักษณะเป็นข้อมูลทวิภาคควรกำหนดการแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution :

B(1,p)) ให้กับข้อมูลจึงจะเหมาะสม โดยทั่วไปผู้วิเคราะห์ควรจะมีการแจกแจงเบื้องแรก (Prior Distribution) ของตัวแปรตอบสนอง เช่น ในกรณีที่ข้อมูลมีลักษณะเป็นข้อมูลจำนวนนับควรกำหนดการแจกแจงแบบปัวซงส์ให้กับข้อมูล แต่ถ้าพบว่าเกิดปัญหา Overdispersion หรือ Underdispersion แล้วก็ควรกำหนดการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) ให้กับข้อมูลจึงจะเหมาะสมกว่า (Gardner, Mulvey & Shaw, 1995)

สำหรับโครงสร้างสหสัมพันธ์มีหลายรูปแบบ เช่น Exchangeable Correlation, Autoregressive Correlation, Independent Correlation, Stationary Correlation และ Fixed Correlation เป็นต้น (Hardin & Hibe, 2003) โดยทั่วไปจะไม่ทราบรูปแบบโครงสร้างสหสัมพันธ์ที่แท้จริง ซึ่งผู้วิเคราะห์มักจะเรียกโครงสร้างสหสัมพันธ์นี้ว่า Working Correlation Matrix (Myers, Montgomery & Vining, 2002)

เมื่อทำการกำหนดฟังก์ชันเชื่อมโยง รูปแบบการแจกแจงของตัวแปรตอบสนอง และโครงสร้างสหสัมพันธ์ก็จะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตอบสนองกับตัวแปรร่วม โดยจะกระทำแบบวนซ้ำ (Iterative Estimation) ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ได้ในตัวแบบที่สร้างขึ้นจะมีคุณสมบัติคงเส้นคงวา (Consistency Estimator) แต่อาจจะเป็นตัวประมาณที่ขาดคุณสมบัติอย่างอื่น เช่น ความไม่เอนเอียง (Unbias Estimator) ถึงแม้ว่าจะกำหนดโครงสร้างสหสัมพันธ์ไม่เหมาะสม (Myers, Montgomery & Vining, 2002)

สำหรับขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสร้างตัวแบบโดยวิธี GEE จากโปรแกรม SAS Version 9.0 ด้วย PROC GENMOD (Ronald & Ray, 2005) เป็นกระบวนการที่ใช้ในการสร้างตัวแบบ GEE ที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่ตัวแปรตอบสนองมีความสัมพันธ์กัน หรือมีการวัดซ้ำ (Tyler & Besa, 2006)

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นของตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการศึกษา แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่าสถิติพื้นฐานของตัวแปรต่างๆ

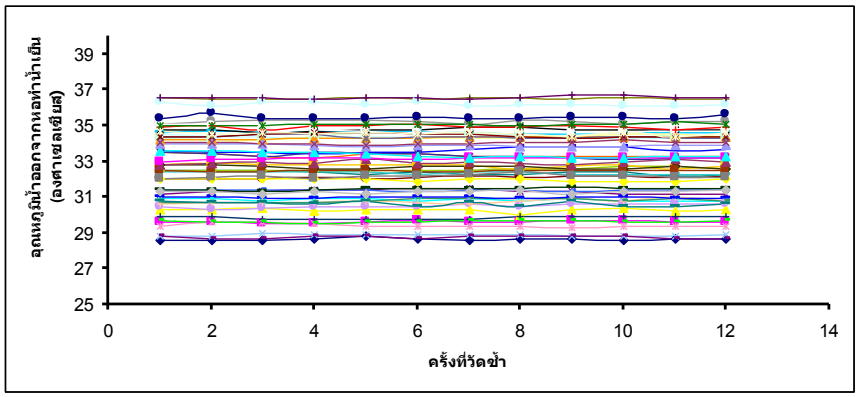
ตัวแปร	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	พิสัย	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	สัมประสิทธิ์การแปรผัน
Y	28.60	36.70	8.10	32.68	2.09	6.40
X1	24.50	58.00	33.50	26.39	1.47	5.55
X2	26.00	38.50	12.50	32.01	2.63	8.21
X3	28.00	41.20	13.20	35.69	3.28	9.19
X4	29.67	49.81	20.14	38.71	7.10	18.33

จากตารางที่ 1 พบว่า อุณหภูมิน้ำออกจากหอทำน้ำเย็นมีค่าเฉลี่ย 32.68 °C และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2.09 °C อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศจะมีความแตกต่างกันถึง 33.50 °C ซึ่งมีค่าเฉลี่ย 26.39 °C และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.47 °C ส่วนอุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ กับอุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น จะมีค่าเฉลี่ยใกล้เคียงกัน คือ 32.01 และ 35.69 °C ตามลำดับ สำหรับอัตราการไหลของน้ำ มีค่าเฉลี่ย 38.71 l/min และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 7.10 l/min โดยอัตราการไหลของน้ำจะมีการผันแปรมากที่สุด (18.33)

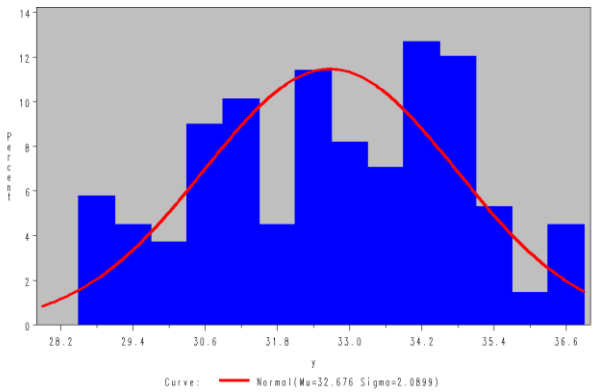
เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรร่วมในแต่ละคู่ พบว่า มีความสัมพันธ์กันน้อยมาก แสดงว่า ตัวแปรร่วมไม่มีความสัมพันธ์กันนั่นเอง

จากพิจารณาถึงลักษณะกราฟของข้อมูลตามการวัดซ้ำ (Spaghetti Plot) พบว่า ข้อมูลในแต่ละการทดลองไม่น่าจะมีความแตกต่างกัน หรือไม่มีอิทธิพลอย่างสุ่ม (Random Effect) เนื่องจากลักษณะเส้นกราฟมีลักษณะค่อนข้างจะเป็นเส้นตรง ดังภาพที่ 1

การสร้างตัวแบบโดยวิธี GEE จะเริ่มจากกำหนดการแจกแจงของข้อมูล ด้วยการทดสอบลักษณะการแจกแจงของข้อมูล และกำหนดการแจกแจงของข้อมูลที่ใช้ในวิเคราะห์ข้อมูลได้อย่างถูกต้อง เมื่อพิจารณาอุณหภูมิน้ำออกจากหอทำน้ำเย็น หรือตัวแปรตอบสนองเป็นข้อมูลชนิดต่อเนื่อง (Continuous Data) จึงทำการทดสอบเพื่อพิจารณาว่าข้อมูลมีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) หรือไม่ ซึ่งได้ผลดังภาพที่ 2



ภาพที่ 1 แสดงกราฟอุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็น จากการวัดซ้ำแต่ละครั้ง



ภาพที่ 2 แสดงการแจกแจงของตัวแปรตอบสนอง (Y)

จากรูปที่ 2 พบว่า เมื่อพิจารณาจาก Histogram จะสังเกตเห็นว่าลักษณะเส้นกราฟมีลักษณะใกล้เคียงโค้งปกติ และเมื่อทำการทดสอบด้วย Shapiro-Wilk Test ได้ค่าสถิติเท่ากับ 0.978 (p-value = 0.949) จึงสรุปได้ว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ

ในขั้นตอนต่อไปจะทำการกำหนดฟังก์ชันเชื่อมโยงที่จะนำมาใช้กับข้อมูล ซึ่งฟังก์ชันเชื่อมโยงมีหลายรูปแบบ เช่น Identity Link , Power Link , Reciprocal Link และ Log Link เป็นต้น ซึ่งฟังก์ชันเชื่อมโยงจะเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการแปลงค่าเฉลี่ยของประชากร (Mean Population) ไม่ใช่ใช้ในการแปลงข้อมูล (Myers, Montgomery & Vining, 2002) โดยทั่วไปเมื่อพบว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ ตามหลักการจะแนะนำให้เลือกฟังก์ชันเชื่อมโยงในรูปแบบ Identity Link

เมื่อไม่ทราบรูปแบบของโครงสร้างสหสัมพันธ์ที่แท้จริงในการกำหนดรูปแบบโครงสร้างสหสัมพันธ์จะทำการพิจารณาจากรูปแบบโครงสร้างสหสัมพันธ์ที่นิยมใช้กันทั่วไป ซึ่งมีอยู่ 4 รูปแบบ ได้แก่ Independent Correlation, Unspecified Correlation, Exchangeable Correlation และ AR(1) Correlation โดยเกณฑ์ที่จะใช้พิจารณาว่ารูปแบบของโครงสร้างสหสัมพันธ์แบบใดเหมาะสมกับข้อมูลมากที่สุด ทำได้โดยพิจารณาจาก Covariance Matrix (Model-Based) และ Covariance Matrix (Empirical) ว่ารูปแบบของโครงสร้างสหสัมพันธ์แบบใดที่ทำให้ Matrix ทั้งสองมีลักษณะคล้ายคลึงกันมากที่สุด แสดงว่ากำหนดรูปแบบโครงสร้างสหสัมพันธ์นั้นเหมาะสมกับข้อมูล (Myers, Montgomery & Vining, 2002)

การสร้างตัวแบบในการพยากรณ์ระหว่างตัวแปรตอบสนอง คือ อุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็น (Y) กับปัจจัยต่างๆ ได้แก่ อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ (X_1) อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ (X_2) อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น (X_3) และอัตราการไหลของน้ำร้อน (X_4) โดยได้ทดลองใส่เทอมของอิทธิพลร่วม (Interaction Effects) ในตัวแบบ พบว่า เทอมของอิทธิพลร่วมไม่มีผลต่อตัวแบบ จึงทำการสร้างตัวแบบโดยใช้เพียงอิทธิพลหลัก (Main Effects) เท่านั้น ดังนั้นตัวแบบในการพยากรณ์เป็นดังนี้

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \quad (1)$$

กำหนดให้รูปแบบการแจกแจงของตัวแปรตอบสนอง (Y) มีการแจกแจงแบบปกติ และกำหนดฟังก์ชันเชื่อมโยงรูปแบบ Identity Link สำหรับการกำหนดรูปแบบโครงสร้างสหสัมพันธ์ พบว่า รูปแบบ Exchangeable Correlation เป็นรูปแบบโครงสร้างสหสัมพันธ์ที่เหมาะสมที่สุด โดยผลของ Covariance Matrix (Model-Based), Covariance Matrix (Empirical) และรูปแบบของ Exchangeable Correlation หรือ Working Correlation Matrix แสดงดังภาพที่ 3 นอกจากนี้ข้อมูลในทางอุตสาหกรรมก็ควรใช้รูปแบบ Exchangeable Correlation ดังนั้นในตัวแบบนี้จึงควรเลือกใช้โครงสร้างสหสัมพันธ์แบบ Exchangeable Correlation (Ballinger, 2004)

Covariance Matrix (Model-Based)

	Prm1	Prm2	Prm3	Prm4	Prm5
Prm1	1.84106	-0.005859	-0.000903	-0.02852	-0.01604
Prm2	-0.005859	0.0003981	-0.000099	-0.000043	2.0113E-6
Prm3	-0.000903	-0.000099	0.0001316	-0.000024	4.4575E-6
Prm4	-0.02852	-0.000043	-0.000024	0.0008142	0.0000354
Prm5	-0.01604	2.0113E-6	4.4575E-6	0.0000354	0.0003766

Covariance Matrix (Empirical)

	Prm1	Prm2	Prm3	Prm4	Prm5
Prm1	7.30780	0.01101	-0.003153	-0.20509	-0.002993
Prm2	0.01101	0.0002036	-0.000063	-0.000421	0.0000255
Prm3	-0.003153	-0.000063	0.0001185	0.0000119	0.0000167
Prm4	-0.20509	-0.000421	0.0000119	0.006507	-0.000525
Prm5	-0.002993	0.0000255	0.0000167	-0.000525	0.0005860

Working Correlation Matrix

	Col1	Col2	Col3	Col4	Col5	Col6
Row1	1.0000	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row2	0.9870	1.0000	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row3	0.9870	0.9870	1.0000	0.9870	0.9870	0.9870
Row4	0.9870	0.9870	0.9870	1.0000	0.9870	0.9870
Row5	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	1.0000	0.9870
Row6	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	1.0000
Row7	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row8	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row9	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row10	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row11	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row12	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870

Working Correlation Matrix

	Col7	Col8	Col9	Col10	Col11	Col12
Row1	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row2	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row3	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row4	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row5	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row6	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row7	1.0000	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row8	0.9870	1.0000	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870
Row9	0.9870	0.9870	1.0000	0.9870	0.9870	0.9870
Row10	0.9870	0.9870	0.9870	1.0000	0.9870	0.9870
Row11	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	1.0000	0.9870
Row12	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	0.9870	1.0000

ภาพที่ 3 แสดง Covariance Matrix (Model-Based), Covariance Matrix (Empirical) และ Working Correlation Matrix เมื่อกำหนดรูปแบบ Exchangeable Correlation

การสร้างตัวแบบในการพยากรณ์ระหว่างตัวแปรตอบสนองและตัวแปรร่วม ด้วยวิธี GEE จะนำตัวแปรร่วมทุกตัวใส่เข้าไปในตัวแบบ หรือตัวแบบเต็ม (Full Model) แล้วจึงพิจารณาตัดตัวแปรร่วมที่ไม่มีส่วนในการอธิบายความผันแปรของตัวแปรตอบสนอง สามารถเขียนตัวแบบเต็มได้ดังนี้

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon \quad (2)$$

จากนั้นทำการทดสอบสมมติฐานเพื่อหาตัวแบบที่เหมาะสม โดยพิจารณาจากการทดสอบสมมติฐานกับพารามิเตอร์ทุกตัว (Overall Test) พบว่า ตัวแปรเหล่านี้น่าจะมีความสัมพันธ์กับตัวแปรตอบสนอง (Y) จากตัวแบบเต็มที่พิจารณาจากตัวแปรร่วมทุกตัว จะใช้วิธีลดตัวแปรร่วม ซึ่งเป็นวิธีการเลือกตัวแปรร่วมเข้าในตัวแบบ โดยเริ่มพิจารณาตัวแปรร่วมทั้งหมด แล้วพิจารณาตัดตัวแปรร่วมที่มีส่วนในการอธิบายความผันแปรของตัวแปรตอบสนองน้อยมากออกไปครั้งละหนึ่งตัวแปร (ทรงศิริ แต้สมบัติ, 2542) เมื่อทำการทดสอบพารามิเตอร์ของตัวแปรทีละตัวโดยใช้ Wald Test เพื่อพิจารณาว่ามีตัวแปรใดบ้างที่มีผลต่อการผันแปรของตัวแปรตอบสนอง (Y) พบว่า ตัวแปรร่วมทุกตัวในตัวแบบมีส่วนในการอธิบายความแปรผันของตัวแปรตอบสนอง (Y) จากผลการวิเคราะห์ที่ได้ในภาพที่ 4 จะได้ตัวแบบที่ใช้ในการพยากรณ์คือ

$$\hat{Y} = 13.5703 + 0.0062X_1 + 0.0261X_2 + 0.4175X_3 + 0.0828X_4 \quad (3)$$

EXCHANGEABLE CORRELATION STRUCTURE
The GENMOD Procedure
Analysis Of GEE Parameter Estimates
Empirical Standard Error Estimates

Parameter	Estimate	Standard Error	95% Confidence Limits		Z	Pr > |Z|
Intercept	13.5703	2.7621	8.1567	18.9839	4.91	<.0001
x1	0.0062	0.0024	0.0014	0.0109	2.55	0.0108
x2	0.0261	0.0112	0.0041	0.0481	2.32	0.0201
x3	0.4175	0.0806	0.2595	0.5755	5.18	<.0001
x4	0.0828	0.0243	0.0351	0.1305	3.41	0.0007

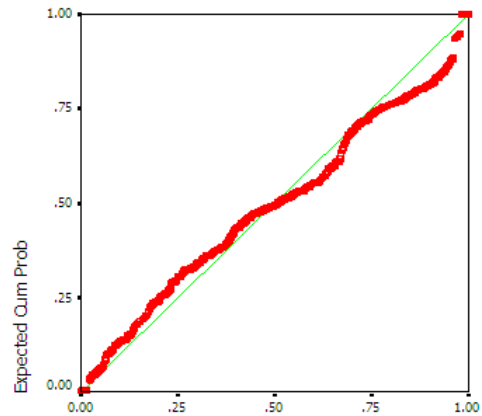
ภาพที่ 4 แสดง Covariance Matrix (Model-Based), Covariance Matrix (Empirical) และ Working Correlation Matrix เมื่อกำหนดรูปแบบ Exchangeable Correlation

ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยในตัวแบบที่สร้างขึ้นนำมาใช้อธิบายความหมายได้ ในกรณีของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรอุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ b_1=0.0062 หมายความว่า เมื่ออุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศเพิ่มขึ้น 1 องศาเซลเซียส จะทำให้อุณหภูมิน้ำออกจากหอทำน้ำเย็นเพิ่มขึ้นโดยเฉลี่ย 0.0062 องศาเซลเซียส เมื่ออุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราไหลของน้ำคงที่ สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรอื่นๆ สามารถอธิบายความหมายได้ในทำนองเดียวกัน ส่วน b_0=13.5703 จะไม่ทำการอธิบายความหมายในที่นี้เนื่องจากค่าของตัวแปรร่วมทุกตัวไม่สามารถมีค่าเป็น 0 ได้นั่นเอง และสำหรับค่า Mean Deviance เป็นค่าที่สามารถใช้ในการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบในการพยากรณ์ควรจะมีค่าเข้าใกล้ 1 (Myers, Montgomery & Vining, 2002) ซึ่งผลที่ได้พบว่าตัวแบบในการพยากรณ์มีความเหมาะสม

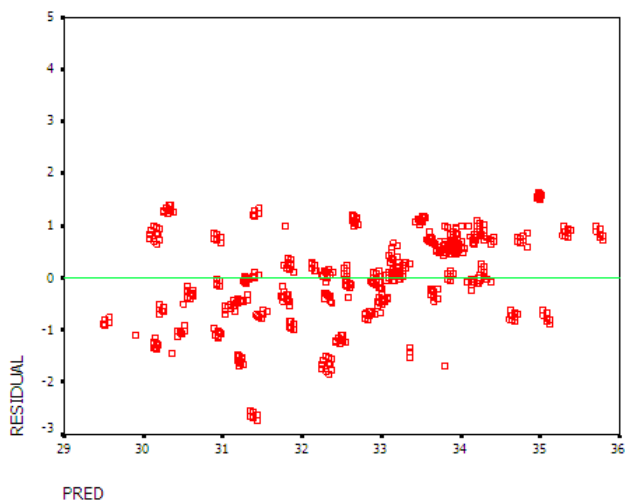
Zheng (2000) ได้เสนอว่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination : R2) ในการวิเคราะห์การถดถอยที่ใช้อธิบายอิทธิพลที่ตัวแปรร่วมมีส่วนในการอธิบายความผันแปรของตัวแปรตอบสนองมากน้อยเพียงใด สามารถขยายแนวความคิดนี้มาปรับใช้กับการสร้างตัวแบบการพยากรณ์ที่สร้างขึ้นโดยใช้วิธี GEE สำหรับการวิเคราะห์กับข้อมูลชนิดต่อเนื่อง ข้อมูลทวิภาค และข้อมูลจำนวนนับ ซึ่งจะเรียกว่า Marginal R-square (R^2m) โดยมีความหมายเช่นเดียวกัน คือความผันแปรของอุณหภูมิน้ำออกจากหอทำน้ำเย็นสามารถอธิบายได้จากตัวแปรต่างๆ ได้แก่ อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราไหลของน้ำ ได้เท่ากับ 77.41% และอีก 22.59% เป็นความผันแปรที่อธิบายได้จากปัจจัยอื่นๆ

การทดสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ได้โดยทำการพิจารณาค่าตกค้าง (Residual) ถึงรูปแบบการแจกแจง ในที่นี้จะพิจารณาจาก Normal Probability Plot ดังภาพที่ 5

จากภาพที่ 5 พบว่า Normal Probability Plot แสดงให้เห็นว่าข้อมูลส่วนใหญ่อยู่บนแนวเส้นตรง มีข้อมูลเพียงบางค่าที่อยู่นอกแนวเส้นตรง ซึ่งอาจจะสรุปได้ว่าข้อมูลมีลักษณะใกล้เคียงการแจกแจงแบบปกติ สำหรับการพิจารณาว่าค่าตกค้างมีความแปรปรวนคงที่หรือไม่ จะพิจารณาจาก Scatter Plot ระหว่างค่าตกค้างกับค่าพยากรณ์ ($\hat{Y}$) ดังภาพที่ 6



ภาพที่ 5 แสดง Normal Probability Plot ของค่าตกค้าง



ภาพที่ 6 แสดง Scatter Plot ระหว่างค่าตกค้างกับค่าพยากรณ์

จากภาพที่ 6 พบว่า ข้อมูลมีการกระจายรอบค่า 0 และกระจายอย่างไม่มีรูปแบบ แสดงว่าค่าตกค้างมีความแปรปรวนคงที่

จากการสร้างตัวแบบของข้อมูลข้างต้นโดยใช้วิธี GEE แสดงให้เห็นว่าอุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศอุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราการไหลของน้ำร้อน มีผลต่ออุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็น ซึ่งค่า Mean Deviance = 0.83 แสดงให้เห็นว่าตัวแบบในการพยากรณ์มีความเหมาะสม โดยตัวแบบที่สร้างขึ้นสามารถอธิบายความผันแปรของอุณหภูมิน้ำออกจากหอทำน้ำเย็นได้ถึง 77.41% และเมื่อทำการตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบที่ได้ โดยจะทำการพิจารณาจากค่าตกค้างพบว่า เป็นไปตามข้อสมมติของการแจกแบบปกติและมีความแปรปรวนคงที่

สรุปผลการวิจัย

การวิเคราะห์ในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างตัวแบบในการพยากรณ์อุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นกับปัจจัยต่างๆ ได้แก่ อุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราการไหลของน้ำร้อน เนื่องจากอุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นได้จากการทดลองซึ่งมีการวัดค่าซ้ำในแต่ละการทดลองจำนวน 12 ครั้ง ซึ่งเป็นข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ภายในการทดลองเดียวกันเนื่องจากมีการวัดค่าซ้ำ นั่นคือมีความสัมพันธ์ภายในกลุ่มของตัวแปรตอบสนอง จึงควรเลือกใช้วิธี GEE มาใช้ในการสร้างตัวแบบ ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะกับข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ภายในกลุ่มของตัวแปรตอบสนองที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน โดยลักษณะการแจกแจงของข้อมูลที่เหมาะสมคือ การแจกแจงแบบปกติ โดยฟังก์ชันเชื่อมโยงที่ใช้ คือ Identity Link และโครงสร้างสหสัมพันธ์แบบ Exchangeable Correlation และอุณหภูมิกระเปาะเปียกของอากาศ อุณหภูมิกระเปาะแห้งของอากาศ อุณหภูมิน้ำเข้าหอทำน้ำเย็น และอัตราการไหลของน้ำร้อน มีผลต่อการอธิบายการผันแปรของอุณหภูมิน้ำที่ออกจากหอทำน้ำเย็นโดยสามารถอธิบายความผันแปรได้ 77.41% ซึ่งเมื่อพิจารณาจากงานวิจัยของพันธุ์ศักดิ์ (2545) ที่ได้ทำการศึกษาหาตัวแบบโดยใช้ค่าเฉลี่ยจากการวัดซ้ำในแต่ละการทดลองด้วยวิธี GLM และไม่ได้ทำการพิจารณาตัวแบบในมุมมองของข้อมูลที่มีการวัดซ้ำ ซึ่งอาจจะทำให้ตัวแบบดังกล่าวไม่เหมาะกับลักษณะของข้อมูลที่ทำการทดลองได้

สำหรับตัวแบบที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถอธิบายความผันแปรได้ไม่สูงมากนัก ดังนั้นในงานวิจัยในอนาคตจึงควรมีการนำปัจจัยอื่นมาศึกษาเพิ่มเติม เนื่องจากในการวิเคราะห์อาจจะยังขาดปัจจัยอื่นที่สำคัญ โดยอาจทำการวิเคราะห์ปัญหาที่อาจจะเกิดขึ้นได้จากสาเหตุอื่น เช่น เมื่อมีตัวแปรร่วมเพิ่มขึ้นแล้วมีความสัมพันธ์กันเองหรือไม่ หรือมีค่าผิดปกติหรือค่าที่มีอิทธิพลในข้อมูลหรือไม่ สิ่งเหล่านี้ล้วนเป็นสาเหตุที่ทำให้ตัวแบบที่ได้ไม่เหมาะสม เพื่อที่จะได้หาวิธีการแก้ไขปัญหาดังกล่าว รวมทั้งอาจจะพิจารณาในลักษณะของฟังก์ชันเชื่อมโยงที่แตกต่างกัน เช่น Power Link หรือ Reciprocal Link สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติต่อไป

เอกสารอ้างอิง

ทรงศิริ แต้สมบัติ. (2542). *การวิเคราะห์การถดถอย*. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

พันธุ์ศักดิ์ อำนาจตระกูล. (2545). *การศึกษาสมรรถนะและสมการคุณลักษณะเฉพาะจากการทดสอบของหอทำน้ำเย็นชนิดลมดูดแบบไหลสวนทาง*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

สุระเดช ฉั่วสุวรรณ. (2540). *การศึกษาประสิทธิภาพของพลาสติกฟิล์มที่ใช้ในหอทำน้ำเย็นชนิดดูดลม*. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท. มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

Ballinger, G.A. (2004). *Using Generalized Estimating Equations for Longitudinal Data Analysis*. http://orm.sagepub.com/cgi/content/abstract/7/2/127 (accessed on Oct 26, 2010)

Gardner, W., Mulvey, E.P. & Shaw, E.C. (1995). Regression Analyses of Counts and Rates: Poisson, Overdispersion Poisson and Negative Binomial Models. *Psychological Bulletin, 118*, 392-404.

Gurney, J.D. & Cotter, I.A. (1966). *Cooling Tower*. London: Maclaren & Sons.

Hardin, J.W. & Hibe, J. (2003). *Generalized Estimating Equations*. London: Chapman & Hall.

Harrison, D.A. & Hulin, C.L. (1989). Investigations of Absenteeism : Using Event-History Models to Study the Absence-Taking Process. *Journal of Applied Psychology, 74*, 300-316.

Liang, K.Y. & Zeger, S. L. (1986). Longitudinal Data Analysis Using Generalized Linear Models. *Biometrika, 73*, 13-22.

McCullagh, P. & Nelder, J.A. (1989). *Gerneralized Linear Models*. (2nd ed.). London: Chapman&Hall.

Meytsar, J.M. (1978). Estimate Cooling Tower Requirements Easily. *Hydrocarbon Process, 57*, 2378-239.

Myers, R.H., Montgomery, D.C. & Vining, G.G. (2002). *Generalized Linear Models with Applications in Engineering and the Sciences*. New York: John Wiley.

Ronald, P.C. & Ray, P. (2005). *SAS* Programming by Example*. North Carolina: SAS Publishing.

Stillman, S. (2003). Review of Generalized Estimating Equations by Hardin and Hibe. *Stata Journal, 3*(2), 208-210.

Soylemez, M.A. (1993). Theoretical and Experimental Analyses of Cooling Towers. *ASHRAE Trans, 35*, 330-337.

Tyler, S. & Besa, S. (2006). *PROC GENMOD with GEE to Analyze Correlated Outcomes Data Using SAS*. http://www.lexjansen.com/wuss/2006/tutorials/TUT-Smith.pdf (accessed on Dec 4, 2010)

Wedderburn, R.W.M. (1974). Quasi-Likelihood Functions, Generalized Linear Models, and the Gauss-Newton Method. *Biometrika, 61*, 439-447.

Whillier, A.R. (1977). Predicting the Performance of Forced-Draught Cooling Towers. *Heat Transfer Eng, 12*, 2-25.

Zheng, B. (2000). Summarizing the Goodness of Fit on Generalized Linear Models for Longitudinal Data. *Statistics in Medicine, 19*, 1265-1275.