ผลเฉลยของปัญหานักเรียนหญิงของเคิร์กแมน หนทางแห่งการได้มาซึ่งผู้ชนะที่แท้จริง

The Solution of Kirkman's Schoolgirl Problem, The Way to Find The Real Champion

อุทุมพร จงถาวรวุฒิ* วีรภาส บุญทอง และจริยา อุ่ยยะเสถียร

Uthoomporn Jongthawonwuth*, Veerapas Boonthong and Chariya Uiyyasathian

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science,

Chulalongkorn University

บทคัดย่อ

การแข่งขันกีฬารายการสำคัญๆ ต้องการรูปแบบการจัดการแข่งขันระหว่างทีมต่างๆ อันนำมาซึ่งผู้ชนะเลิศที่เก่งที่สุดอย่างแท้จริง บทความนี้สนใจการแข่งขันกีฬาซึ่งแต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง 3 ทีม ประเภทที่มีการบุกและการตั้งรับ เช่นการแข่งขันฟุตบอลแบบ 3 ทีม เป็นต้น เราได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาโดยประยุกต์ใช้ผลเฉลยของระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน เพื่อสร้างรูปแบบการจัดการแข่งขันที่ต้องการ อีกทั้งยังพิสูจน์ได้ว่า จะสามารถสร้างรูปแบบการจัดการแข่งขันดังกล่าวได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนทีมจะต้องไม่เป็น 6 แต่ต้องอยู่ในรูป $6t, 6t+1, 6t+3$ หรือ $6t+4$ เท่านั้น เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำสำคัญ : ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน ปัญหานักเรียนหญิงของเคิร์กแมน

Abstract

The essence of a sport scheduling is to make sure that each team can compete fairly and the best team will win. This article focuses on a tournament in which each match is played between 3 teams; each pair of teams play role in attacking and defending; for example, in a 3-team football competition. We present a solution to find a schedule to guarantee the undisputed champion by applying the solutions of Kirkman triple systems. Furthermore, it is also proved that this problem has a solution if and only if the number of teams is not 6 and it is in the forms of $6t, 6t+1, 6t+3$ or $6t+4$ for some natural number t.

Keywords: Steiner triple system, Kirkman triple system, Kirkman's schoolgirls problem

*Corresponding author. E-mail : uthoomporn.j@gmail.com

บทนำ

ในปัจจุบันทั่วโลกให้ความสนใจกับการแข่งขันกีฬารายการสำคัญ ๆ เป็นอย่างมาก ไม่ว่าจะเป็นกีฬาโอลิมปิก กีฬาพาราลิมปิก หรือฟุตบอลโลก ซึ่งแต่ละรายการและแต่ละชนิดกีฬามีรูปแบบการจัดการแข่งขันเพื่อหาผู้ชนะที่แตกต่างกันออกไป บางรายการแข่งขันแบบพบกันหมด แต่บางรายการแข่งขันแบบแพ้คัดออก ในขณะที่บางรายการแข่งขันแบบท้าชิง หรือในบางครั้งมีการนำรูปแบบเหล่านี้มาผสมผสานกัน คำถามที่ตามมาอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้คือ ผู้ชนะเลิศใช่ผู้ที่เก่งที่สุดหรือไม่ และการจัดการแข่งขันรูปแบบใดที่ทำให้เราสามารถค้นหาผู้ที่เก่งที่สุดได้จริง หากการแข่งขันแต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง 2 ทีม การแข่งขันแบบพบกันหมดในระบบเหย้า–เยือน ทำให้ทุกทีมได้แข่งขันกับทีมอื่น ๆ ทั้งหมด ทั้งในลักษณะของการเป็นทีมเหย้าและทีมเยือน ดังนั้นทีมที่ชนะจากการจัดการแข่งขันลักษณะนี้จึงเป็นทีมที่เก่งที่สุดอย่างแท้จริง แต่ถ้าการแข่งขันแต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง 3 ทีมประเภทที่มีการบุกและการตั้งรับ เช่น การแข่งขันฟุตบอลแบบสามทีมซึ่งได้รับความนิยมอย่างมากในประเทศแถบสแกนดิเนเวีย จะไม่สามารถจัดการแข่งขันแบบพบกันหมดในระบบเหย้า–เยือนได้ ทว่าผลเฉลยของปัญหานักเรียนหญิงของเคิร์กแมนสามารถนำมาช่วยแก้ไขปัญหานี้ได้

ภาพที่ 1: แสดงการแข่งขันฟุตบอลแบบสามทีม

ที่มา: http://www.101greatgoals.com/blog/nutty–norwegians–tv2–invent–three–way–football/ [29 กันยายน 2555]

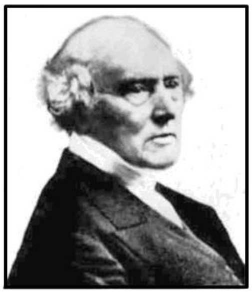
ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน (Kirkman Triple System)

ปัญหานักเรียนหญิงของเคิร์กแมน (Kirkman's Schoolgirl Problem) เป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงในสาขา**แผนแบบเชิงการจัด** (Combinatorial Design) ถูกตั้งเมื่อปี พ.ศ.2393 โดยพระอธิการโทมัส เพงตัน เคิร์กแมน (Kirkman) แห่งโบสถ์ครอฟท์ (Croft) เขียนลงในหนังสือชื่อ "บันทึกประจำวันของสุภาพสตรีและสุภาพบุรุษ (Ladies's and Gentleman's Diary)" ความว่า "ถ้ามีนักเรียนหญิงจำนวน 15 คน จะมีวิธีจัดการเดินแถว 5 แถว แถวละ 3 คน เป็นเวลา 7 วัน (เดินวันละ 1 รอบ) ได้หรือไม่ โดยที่นักเรียนหญิงแต่ละคนต้องเดินในแถวเดียวกับเพื่อนคนอื่นทุกคน คนละ 1 รอบเท่านั้น" (Kirkman, 1850)

ก่อนจะกล่าวถึงผลเฉลยของปัญหานักเรียนหญิงของเคิร์กแมนจำเป็นต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ และระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน ทั้งนี้ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ (ตั้งตามชื่อของ จาคอบ สไตเนอร์ (Jakob Steiner) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ ผู้บุกเบิกศาสตร์แขนงนี้) นิยามว่า **ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ขนาด v** (Steiner Triple System of Order v : $STS(v)$) คือแผนแบบ (X, B) ซึ่ง X เป็นเซตขนาด v ($v \geq 3$) และ B เป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตย่อยขนาด 3 ของ X (เรียกว่า "**บล็อก**") ภายใต้เงื่อนไขว่า สมาชิก 2 ตัวใด ๆ ของ X ต้องปรากฏพร้อมกันใน 1 บล็อกเท่านั้น ในขณะที่**ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนขนาด v** (Kirkman Triple System of

Order v : $KTS(v)$) คือ ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ที่สามารถแบ่งกั้น (partition) B ได้ เรียกว่า "**ชั้นขนาน**" (Parallel Class) โดยที่แต่ละชั้นจะปรากฏสมาชิกของ X ครบทุกตัว ตัวละ 1 ครั้ง (Jakob Steiner, 1853)

(a)



(b)

ภาพที่ 2: (a) จาคอบ สไตเนอร์
(b) โทมัส เพงตัน เคิร์กแมน

ที่มา: www.ams.org/samplings/feature–column/fcarc–finitegeometries [29 สิงหาคม 2555]

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาแผนแบบ (X, B) เมื่อ X = {1, 2, …, 7} และ B = {{1, 2, 4}, {2, 3, 5}, {3, 4, 6}, {4, 5, 7}, {5, 6, 1}, {6, 7, 2}, {7, 1, 3}} พบว่าแผนแบบ (X, B) เป็น $STS(7)$ ■

เพื่อความสะดวกและไม่สับสน ตั้งแต่นี้เป็นต้นไป จะใช้สัญลักษณ์ 1 2 3 แทน {1, 2, 3} เช่น เซตของบล็อกของ $STS(7)$ สามารถแสดงได้ดังนี้ 1 2 4, 2 3 5, 3 4 6, 4 5 7, 5 6 1, 6 7 2, 7 1 3

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> พิจารณา X = {1, 2, …, 9} และเซตของบล็อกที่จัดเป็นชั้นขนานด้านล่างนี้ เห็นได้ชัดว่าเป็น $KTS(9)$

1 5 9	2 6 9	3 7 9	4 8 9
2 7 8	3 8 1	4 1 2	5 2 3
3 4 6	4 5 7	5 6 8	6 7 1
ชั้นขนานที่ 1	ชั้นขนานที่ 2	ชั้นขนานที่ 3	ชั้นขนานที่ 4

■

นอกจากนี้ยังสามารถสังเกตเพิ่มเติมได้อีกว่าการจัดการแข่งขันที่แต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง 3 ทีม โดยสนใจเพียงให้แต่ละทีมได้พบกับทีมอื่นทั้งหมดทีมละ 1 ครั้ง เปรียบได้กับระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ โดยแต่ละทีมเป็นเสมือนแต่ละสมาชิกของ X และการแข่งขันแต่ละนัดเป็นเสมือนแต่ละบล็อก แต่ถ้าสนใจเพิ่มเติมว่าการจัดการแข่งขันที่ได้นั้นนอกจากจะต้องสอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นแล้วยังต้องสามารถแบ่งการแข่งขันเป็นวันได้ด้วย (ใน 1 วันทุกทีมต้องแข่งขัน 1 นัด) การจัดการแข่งขันรูปแบบนี้จะมีลักษณะประหนึ่งระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน นอกจากนี้ผลเฉลยของปัญหานักเรียนหญิงของเคิร์กแมนก็คือ $KTS(15)$ นั่นเอง

สำหรับกรณีทั่วไป การมีผลเฉลยของ $STS(v)$ และ $KTS(v)$ เกิดขึ้นเมื่อค่า v เป็นไปตามเงื่อนไขเฉพาะบางประการซึ่งดังแสดงในทฤษฎีบทที่ 1 และทฤษฎีบทที่ 2 ซึ่งรายละเอียดบทพิสูจน์สามารถอ่านได้ในเอกสารงานวิจัยของสไตเนอร์ (Steiner, 1853) และเอกสารงานวิจัยของ เรย์-เชาด์ฮูริ และวิลสัน (Ray-Chaudhuri & Wilson, 1971)

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> (Steiner, 1853) จะมี $STS(v)$ ก็ต่อเมื่อ $v \equiv 1$ หรือ $3 \pmod 6$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> (Ray-Chaudhuri & Wilson, 1971) จะมี $KTS(v)$ ก็ต่อเมื่อ $v \equiv 3 \pmod 6$

ถ้า $STS(v)$ เป็น $KTS(v)$ แล้ว แต่ละชั้นขนานจะเป็นการแบ่งกั้นเซตของจุดยอดออกเป็นบล็อกขนาด 3 ดังนั้น 3 จึงหาร v ลงตัว สำหรับเงื่อนไขพอเพียงพิสูจน์ได้โดยการสร้าง $KTS(v)$ ซึ่งตั้งแต่อดีตจวบจนปัจจุบัน นักวิจัยคิดค้นวิธีการสร้าง $KTS(v)$ ได้หลากหลายวิธี เช่น งานวิจัยของสตินสันและแวนสโตน (Stinson & Vanstone, 1985) งานวิจัยของบาร์เนียย์และบริสเซท (Barnire & Brisset, 2002) และงานวิจัยของลี่และคณะ (Li et al., 2011) อย่างไรก็ตาม ก่อนที่ เรย์-เชาด์ฮูริ และวิลสันจะเป็นผู้พิสูจน์ได้เป็นกลุ่มแรก เวลาก็ล่วงเลยมานานถึง 121 ปี จึงเป็นที่น่าสนใจที่จะศึกษาแนวคิดดั้งเดิมในการสร้าง $KTS(v)$ ซึ่งในที่นี้แสดงการหา $KTS(9)$ และ $KTS(15)$ ด้วยวิธีของรามอน ลูล (Ramon Lull) ที่คิดค้นไว้ตั้งแต่พุทธศตวรรษที่ 18 (Gardner, 1997) วิธีนี้เป็นวิธีที่เข้าใจได้ง่าย และเห็นเป็นรูปธรรม ซึ่งจะพิจารณาแผนแบบด้วยโมเดลทางทฤษฎีกราฟดังกล่าวคือ ถ้ามี $STS(v)$ แล้วจะสามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมในกราฟบริบูรณ์ที่มี v จุดยอด (แต่ละคู่ของจุดยอดมีเส้นเชื่อมจำนวน 1 เส้นเท่านั้น แทนด้วยสัญลักษณ์ K_v) เป็นสามเหลี่ยม (K_3) ได้ และถ้า $STS(v)$ ดังกล่าวเป็น $KTS(v)$ เมื่อ $v = 6t + 3$ แล้วจะสามารถแบ่งกั้นเซตของสามเหลี่ยมเหล่านั้นได้ จำนวน $3t + 1$ ชั้น โดยที่แต่ละชั้นขนานประกอบด้วยสามเหลี่ยมที่ใช้จุดยอดครบทุกจุดยอดและไม่ใช้จุดยอดซ้ำกันจำนวน $2t + 1$ รูป ในภาพที่ 3(b) แสดง $STS(7)$ ในตัวอย่างที่ 1 ด้วยรูปแบบการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_7 ด้วยสามเหลี่ยม

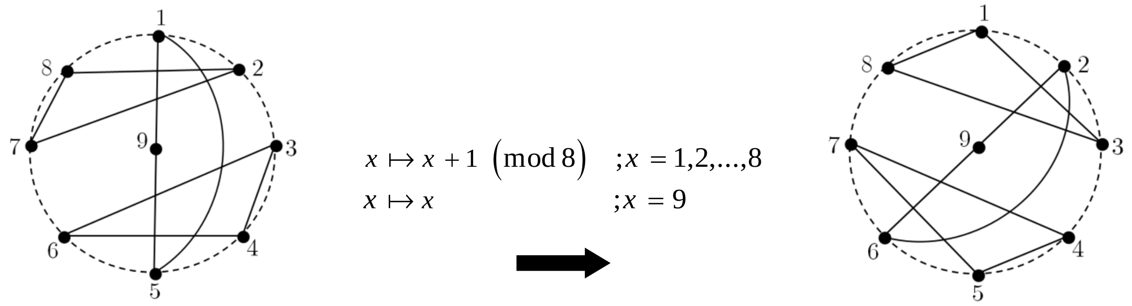
(a) (b)

ภาพที่ 3: (a) แสดงกราฟบริบูรณ์ที่มี 7 จุดยอด

(b) แสดงการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_7 ด้วยสามเหลี่ยม

วิธีการสร้าง $KTS(9)$ และ $KTS(15)$

$KTS(9)$: สร้างได้โดยให้แต่ละสมาชิกของ X={1, 2, ..., 9} แทนด้วยจุดยอดของกราฟโดยเขียนจุดยอดหมายเลข 1 ถึง 8 เรียงโดยรอบวงกลม และจุดยอดหมายเลข 9 ในตำแหน่งจุดศูนย์กลางของวงกลม จากนั้นสร้างบล็อกโดยการเขียนเส้นเชื่อมเพิ่มเติมเพื่อให้เกิดรูปสามเหลี่ยมตั้งต้นจำนวน 3 รูป (สามเหลี่ยมแต่ละรูปแทนแต่ละบล็อก) ตามภาพที่ 4(a)



(a) (b)

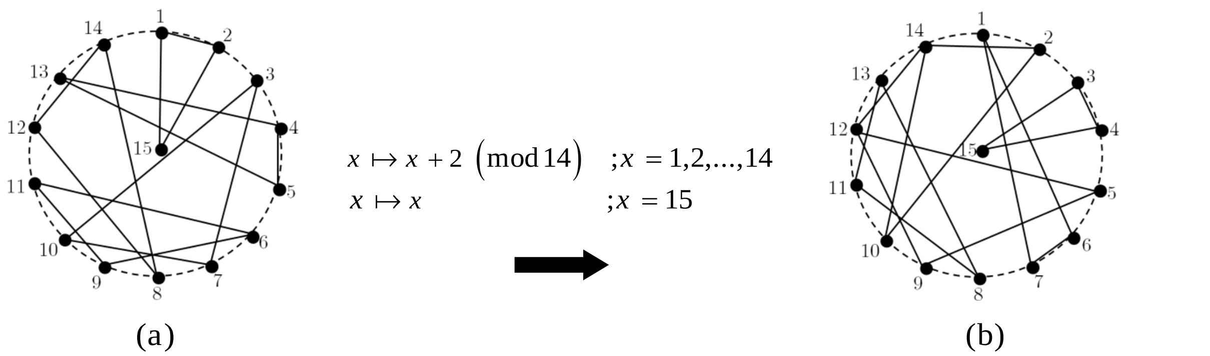
ภาพที่ 4: แสดงขั้นตอนการสร้าง $KTS(9)$

จากภาพที่ 4(a) พบว่า 3 บล็อกนี้ประกอบด้วย 1 5 9   2 7 8 และ 3 4 6 เป็นชั้นขนาน ในที่นี้ให้ชื่อว่าชั้นขนานที่ 1 เนื่องจากการสร้าง $KTS(9)$ ต้องจัดบล็อกให้เป็น 4 ชั้น ดังนั้นอีก 3 ชั้นขนานที่เหลือสามารถสร้างได้โดยการหมุนสามเหลี่ยมเหล่านี้จำนวน 3 รอบ (การหมุนแต่ละครั้งคือการส่ง $x \mapsto x+1$ เมื่อ $x=$1, 2,..., 8 ภายใต้สมภาคมอดุโล 8 และส่ง $9 \mapsto 9$) ทั้งนี้ตัวอย่างการหมุนรอบที่ 1 แสดงได้ดังนี้

ชั้นขนานที่ 1	1	5	9	2	7	8	3	4	6
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
ชั้นขนานที่ 2	2	6	9	3	8	1	4	5	7

ภายหลังการหมุนจะได้ชั้นขนานที่ 2 ดังแสดงในภาพที่ 4(b) และเมื่อหมุนจนครบทั้ง 3 รอบ ถ้าเซตของสามเหลี่ยมที่ได้แบ่งกั้นเซตของ K_9 แล้วจะได้ $KTS(9)$ ดังนั้นเซตของสามเหลี่ยมตั้งต้นที่เหมาะสมเท่านั้นที่ทำให้เกิด $KTS(9)$ ได้ ดังเช่นเซตของสามเหลี่ยมในชั้นขนานที่ 1 ซึ่งปรากฏในตัวอย่างที่ 2 อย่างไรก็ตามเทคนิคการหมุนลักษณะนี้สามารถประยุกต์เพื่อสร้าง $KTS(15)$ ได้เช่นกัน ดังนี้

$KTS(15)$: สร้างได้โดยให้แต่ละสมาชิกของ X={1, 2, ..., 15} แทนด้วยจุดยอดของกราฟโดยเขียนจุดยอดหมายเลข 1 ถึง 14 เรียงโดยรอบวงกลม และจุดยอดหมายเลข 15 ในตำแหน่งจุดศูนย์กลางของวงกลม จากนั้นสร้างบล็อกโดยการเขียนเส้นเชื่อมเพิ่มเติมเพื่อให้เกิดรูปสามเหลี่ยมตั้งต้นจำนวน 5 รูป ดังภาพที่ 5(a)



ภาพที่ 5: แสดงขั้นตอนการสร้าง $KTS(15)$

จากภาพที่ 5(a) จะได้ว่าชั้นขนานหนึ่งของ$KTS(15)$ประกอบด้วย 1 2 15   3 7 10   4 5 13   6 9 11 และ 8 12 14 ในที่นี้ให้ชื่อว่าชั้นขนานที่ 1 สำหรับอีก 6 ชั้นที่เหลือสามารถสร้างได้โดยการหมุนสามเหลี่ยมเหล่านี้จำนวน 6 รอบ (การหมุนแต่ละครั้งคือการส่ง $x \mapsto x+2$ เมื่อ $x=$1, 2,..., 14 ภายใต้สมภาคมอดุโล 14 และส่ง 15↦15) ทั้งนี้ตัวอย่างการหมุนรอบที่ 1 แสดงได้ดังนี้

ชั้นขนานที่ 1	1 2 15	3 7 10	4 5 13	6 9 11	8 12 14
	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓
ชั้นขนานที่ 2	3 4 15	5 9 12	6 7 1	8 11 13	10 14 2

หลังจากการหมุนรอบแรกเสร็จสิ้นจะได้ชั้นขนานที่ 2 ดังแสดงในภาพที่ 5(b) และเมื่อทำการหมุนจนครบทั้ง 6 รอบจะได้ $KTS(15)$ ดังนี้

ชั้นขนานที่ 1	ชั้นขนานที่ 2	ชั้นขนานที่ 3	ชั้นขนานที่ 4
1 2 15	3 4 15	5 6 15	7 8 15
3 7 10	5 9 12	7 11 14	9 13 2
4 5 13	6 7 1	8 9 3	10 11 5
6 9 11	8 11 13	10 13 1	12 1 3
8 12 14	10 14 2	12 2 4	14 4 6

ชั้นขนานที่ 5	ชั้นขนานที่ 6	ชั้นขนานที่ 7
9 10 15	11 12 15	13 14 15
11 1 4	13 3 6	1 5 8
12 13 7	14 1 9	2 3 11
14 3 5	2 5 7	4 7 9
2 6 8	4 8 10	6 10 12

สำหรับค่า v อื่น ๆ ที่มีค่ามากขึ้น การหาชุดของสามเหลี่ยมตั้งต้นทำได้ซับซ้อนขึ้น วิธีการสร้างในลักษณะนี้จะทำได้ลำบาก การสร้าง $KTS(v)$ เมื่อ $v \geq 39$ จะใช้เทคนิคแตกต่างกันไป บางครั้งสามารถใช้ผลเฉลยของ $KTS(v)$ ที่ v มีค่าน้อยกว่ามาประยุกต์ บางครั้งอาจใช้ความรู้แผนแบบในรูปแบบอื่นเข้ามาประกอบการสร้างด้วย ซึ่งผู้อ่านที่สนใจสามารถอ่านได้ในหนังสือของวอลลิส (Wallis, 2007)

รูปแบบการจัดการแข่งขันเพื่อหาผู้ชนะที่แท้จริง

จากนี้ไปจะใช้ผลเฉลยของ $STS(v)$ และ $KTS(v)$ เป็นเครื่องมือสำหรับแก้ปัญหาวิธีจัดการแข่งขันซึ่งแต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง 3 ทีมประเภทที่มีการบุกและการตั้งรับ ซึ่งมีกติกาโดยคร่าวดังนี้

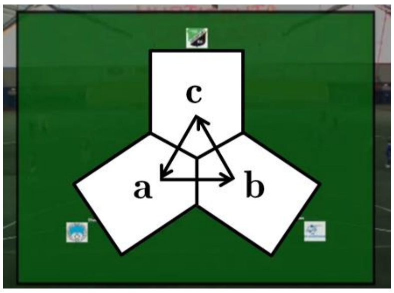
การแข่งขันกีฬารายการหนึ่งมีทีมเข้าแข่งทั้งสิ้น v ทีม โดยที่การแข่งขันแต่ละนัดจะมีทีมลงสนามเพื่อแข่งขันพร้อมกันจำนวน 3 ทีม สมมติว่าเป็นทีม a ทีม b และทีม c ถ้าทิศทางการบุกและการตั้งรับในสนามทั้ง 3 เหตุการณ์ต่อไปนี้เกิดขึ้นพร้อมกัน คือ

(i) a บุกไปฝั่ง b และ b ตั้งรับ a เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{ab}$

(ii) b บุกไปฝั่ง c และ c ตั้งรับ b เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{bc}$

(iii) c บุกไปฝั่ง a และ a ตั้งรับ c เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{ca}$

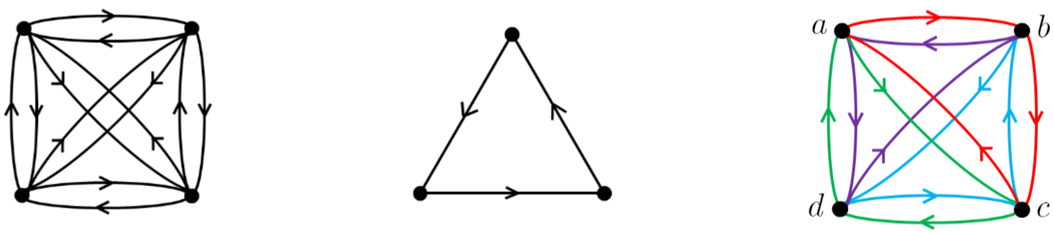
เราจะเขียนแทนการแข่งขันนัดนี้ด้วยสัญลักษณ์ (a,b,c) และเมื่อการบุกของทีมใดประสบความสำเร็จก็จะได้ 1 แต้ม เช่น ในการแข่งขันฟุตบอลถ้าทีม a ยิงประตูทีม b ได้ จะได้รับ 1 คะแนน (ทีม a ยิงประตูทีม c ไม่นับคะแนน) ซึ่งในกีฬาบางประเภทอาจให้ผู้ที่ได้แต้มก่อนเป็นผู้ชนะในนัดนั้น หรือบางประเภทอาจใช้วิธีการจับเวลาแล้วให้ผู้ชนะคือผู้ที่ได้แต้มมากที่สุด



ภาพที่ 6: แสดงทิศทางการบุกของการแข่งขันฟุตบอลแบบสามทีม

เพื่อให้ผู้ที่ชนะเลิศคือผู้ที่เก่งที่สุดอย่างแท้จริงแต่ละทีมจึงควรได้แข่งกับทีมอื่นทุกทีมทั้งในเหตุการณ์ที่ตนเองเป็นฝ่ายบุกและตนเองเป็นฝ่ายตั้งรับ เช่น ถ้าการแข่งขันกีฬารายการนี้มีทีมเข้าร่วม คือ ทีม a ทีม b ทีม c และทีม d ทิศทางการบุกทั้งหมดที่ควรต้องเกิดขึ้น คือ $\overrightarrow{ab}$ $\overrightarrow{ba}$ $\overrightarrow{ac}$ $\overrightarrow{ca}$ $\overrightarrow{ad}$ $\overrightarrow{da}$ $\overrightarrow{bc}$ $\overrightarrow{cb}$ $\overrightarrow{bd}$ $\overrightarrow{db}$ $\overrightarrow{cd}$ และ $\overrightarrow{dc}$ ซึ่งหากจำลองการแข่งขันด้วยกราฟ สามารถแทนทีมทั้งหมดด้วยจุดยอดและทิศทางการบุกทั้งหมดด้วยเส้นเชื่อมที่มีทิศทาง (ทิศทางการบุกa บุกไปฝั่ง b แทนด้วยเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด a กับ จุดยอด b โดยหัวลูกศรมีทิศทางชี้จากa ไป b) พบว่าเมื่อการแข่งขันมีทีมเข้าร่วม v ทีม จะแทนทีมและทิศทางการบุกทั้งหมดได้ด้วยกราฟ $\boldsymbol{K}_v^*$ ซึ่งนิยามเป็นกราฟที่มี v จุดยอด ซึ่งทุกคู่ของจุดยอดมีเส้นเชื่อมระหว่างกัน 2 เส้น และเส้นเชื่อมทั้งสองมีทิศทางตรงข้ามกัน เช่นในภาพที่ 7(a) แสดงK_4^*

กำหนดให้ กราฟที่มี 3 จุดยอด ที่แต่ละคู่ของจุดยอดมีเส้นเชื่อมระหว่างกัน 1 เส้น โดยเส้นเชื่อมเหล่านี้มีทิศทางเดียวกัน (ทวนเข็มนาฬิกาทั้งหมดหรือตามเข็มนาฬิกาทั้งหมด) เรียกว่า “**3–วงจร** (3–circuit)” ดังภาพที่ 7(b) สังเกตว่าจำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดใน K_v^* มี $v(v-1)$ เส้น และการแข่งขัน (a,b,c) เป็น 3–วงจร นอกจากนี้จะนิยามเพิ่มเติมว่าสองวงจรใด ๆ จะเรียกว่า “**สองวงจรตรงข้ามกัน**” เมื่อสองวงจรนั้นมีจุดยอดเหมือนกันแต่เส้นเชื่อมมีทิศทางตรงข้ามกัน เช่น (a,b,c) กับ (a,c,b)



(a) (b) (c)

ภาพที่ 7: (a) แสดง K_4^*

(b) แสดง 3-วงจร

(c) แสดงการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_4^* ด้วย 3-วงจร

ในการแข่งขันแต่ละนัดจะเกิดทิศทางการบุกทั้งสิ้น 3 เหตุการณ์ที่ประกอบกันเป็น 3–วงจร และในการแข่งขันให้จบหนึ่งรายการเพื่อหาผู้ชนะที่เก่งที่สุดจะต้องมีทิศทางการบุกจนครบ K_v^* พอดี เพราะฉะนั้นรูปแบบการจัดการแข่งขัน

จึงประหนึ่งการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_v^* ด้วย 3–วงจร เช่น ภาพที่ 7(c) แสดงการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_4^* ของการแข่งขันกีฬาที่มีทีมเข้าร่วม คือ ทีม a ทีม b ทีม c และทีม d ด้วย 3–วงจร ดังนี้ (a,b,c) (a,c,d) (a,d,b) และ (b,d,c) สำหรับส่วนต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า K_v^* สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดออกเป็น 3–วงจรได้ก็ต่อเมื่อ $v \equiv 0,1,3$ หรือ $4(\mathrm{mod}\ 6)$ ยกเว้นเมื่อ $v = 6$ โดยอ้างอิงการพิสูจน์จากงานวิจัยซึ่งเรียบเรียงโดย เจ ซี เบอร์มอนด์ (Bermond, 1974) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>**ทฤษฎีบทที่**</u> <u>3</u> (Bermond, 1974) สำหรับ $v \neq 6$ จะได้ว่า K_v^* สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดออกเป็น 3–วงจรได้ก็ต่อเมื่อ $v \equiv 0,1,3$ หรือ $4(\mathrm{mod}\ 6)$

<u>บทพิสูจน์</u> ให้ $v \neq 6$ สมมติให้ K_v^* สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดออกเป็น 3–วงจรได้ ดังนั้น 3 จะต้องหารจำนวนเส้นเชื่อมของ K_v^* ลงตัว นั่นคือ $v(v-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ ดังนั้น $v \equiv 0,1,3$ หรือ $4(\mathrm{mod}\ 6)$ ในส่วนของการพิสูจน์เงื่อนไขพอเพียงจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> $v \equiv 1$ หรือ $3(\mathrm{mod}\ 6)$

กรณีนี้สามารถใช้ผลของทฤษฎีบทที่ 1 โดยตรง คือ สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_v ออกเป็นสามเหลี่ยมได้ตามรูปแบบของ $STS(v)$ จากนั้นนำสามเหลี่ยม $\{x,y,z\}$ ใด ๆ มาแยกเป็น 3–วงจร จำนวน 2 วง คือ (x,y,z) และ (x,z,y) จะได้ว่าK_v^* สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดออกเป็น 3–วงจรได้

<u>กรณีที่ 2</u> $v \equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$

ให้ $v = 6t+4$ โดยที่ $t \geq 1$ และ x_0 เป็นจุดยอดใด ๆ ของK_v^*

พิจารณา $K_v^* - \{x_0\}$ (กราฟที่ได้จากการลบจุดยอด x_0 และเส้นเชื่อมทั้งหมดที่เชื่อมกับ x_0 ออกจาก K_v^*) ได้ว่า $K_v^* - \{x_0\}$ มีจุดยอดเหลืออยู่ $6t+3$ จุดยอด จากทฤษฎีบทที่ 2 จะสามารถประยุกต์ผลจากการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน $K_v - \{x_0\}$ ออกเป็นสามเหลี่ยมได้ตามรูปแบบของ $KTS(v-1)$ ในทำนองเดียวกับกรณีที่1 ทำให้ได้ชั้นขนานของ 3–วงจร จำนวน $2(3t+1)$ ชั้น โดยแต่ละชั้นขนานประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $2t+1$ วง ในการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_{6t+3}^* สมมติให้ $P = \{C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_{2t+1}\}$ เป็นชั้นขนานหนึ่ง โดยที่ $C_i = (x_i, y_i, z_i)$ ดังนั้นการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_v^* ที่ต้องการจะประกอบด้วย 2 ส่วน จำแนกตามลักษณะที่มาของ 3–วงจรเป็น Q_1 และ Q_2 ดังนี้

Q_1 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $3(2t+1)$ วง โดยอาศัยแต่ละC_i ใน P และ x_0 มาสร้าง (x_0,x_i,y_i) (x_0,y_i,z_i) และ (x_0,z_i,x_i)

Q_2 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $(2t+1)\big(2(3t+1)-1\big) = (2t+1)(6t+1)$ วง ในชั้นขนานที่เหลือนอกเหนือจาก P

<u>กรณีที่ 3</u> $v \equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$

ให้ $v = 6t+6$ โดยที่ $t \geq 1$ และ x_0, y_0, z_0 เป็น 3 จุดยอดใด ๆ ที่แตกต่างกันใน K_v^*

พิจารณา $K_v^* - \{x_0, y_0, z_0\}$ (กราฟที่ได้จากการลบจุดยอด x_0, y_0, z_0 และเส้นเชื่อมทั้งหมดที่เชื่อมกับสามจุดยอดนี้ออกจาก K_v^*) ซึ่งเป็นกราฟที่มี $6t+3$ จุดยอด จากทฤษฎีบทที่ 2 จะสามารถประยุกต์ผลจากการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน $K_v^* - \{x_0, y_0, z_0\}$ ออกเป็นสามเหลี่ยมได้ตามรูปแบบของ $KTS(v-3)$ จะมีชั้นขนานของ 3–วงจรอยู่จำนวน $2(3t+1)$ ชั้น โดยแต่ละชั้นขนานประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $2t+1$ วง ให้ $P = \{C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_{2t+1}\}$

$P' = \{C_1', ..., C_j', ..C_{2t+1}'\}$ และ $P'' = \{C_1'', ..., C_k'', ..C_{2t+1}''\}$ เป็นชั้นขนานโดยที่ $C_i = (x_i, y_i, z_i)$ $C_j' = (x_j', y_j', z_j')$ และ $C_k'' = (x_k'', y_k'', z_k'')$ ดังนั้นการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_v^* ที่ต้องการประกอบด้วย 5 ส่วน จำแนกตามลักษณะที่มาของ 3–วงจร เป็น Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 และ Q_5 ดังนี้

Q_1 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน 2 วง จาก (x_0, y_0, z_0) และ (x_0, z_0, y_0)

Q_2 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $3(2t+1)$ วง โดยอาศัยแต่ละ C_i ใน P และ x_0 มาสร้าง (x_0, x_i, y_i) (x_0, y_i, z_i) และ (x_0, z_i, x_i)

Q_3 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $3(2t+1)$ วง โดยอาศัยแต่ละ C_i' ใน P' และ y_0 มาสร้าง (y_0, x_j', y_j') (y_0, y_j', z_j') และ (y_0, z_j', x_j')

Q_4 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $3(2t+1)$ วง โดยอาศัยแต่ละ C_i'' ใน P'' และ z_0 มาสร้าง (z_0, x_k'', y_k'') (z_0, y_k'', z_k'') และ (z_0, z_k'', x_k'')

Q_5 ประกอบด้วย 3–วงจร จำนวน $(2t+1)(2(3t+1)-3) = (2t+1)(6t-1)$ วง ในชั้นขนานที่เหลือนอกเหนือจาก P , P' และ P'' ■

__ทฤษฎีบทที่ 4__ (Bermond, 1974) ไม่สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_6^* ออกเป็น 3–วงจรได้

<u>บทพิสูจน์</u> สมมติให้สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_6^* ออกเป็น 3–วงจรได้ และให้ 1 เป็นจุดยอดใด ๆ ใน K_6^* พิจารณา 3–วงจร ที่มีจุดยอด 1 อยู่ในวง พบว่าต้องเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 1</u> ไม่มีสอง 3–วงจรตรงข้ามกันที่มี 1 อยู่ในทั้งสองวงจรนั้น

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ 3–วงจรที่มี 1 อยู่ มีรูปแบบเป็น $(1,2,3)$ $(1,3,4)$ $(1,4,5)$ $(1,5,6)$ และ $(1,6,2)$ พิจารณาเส้นเชื่อมที่มีจุดยอด 2 เป็นจุดปลาย ซึ่งไม่ซ้ำกับเส้นเชื่อมที่เกิดขึ้นแล้วในรูปแบบข้างต้น พบว่า $\overrightarrow{24}$ ต้องอยู่ใน 3–วงจร $(2,4,3)$ เท่านั้น (เนื่องจาก $\overrightarrow{12}$ $\overrightarrow{45}$ และ $\overrightarrow{62}$ ปรากฏแล้วใน 3–วงจร $(1,2,3)$ $(1,4,5)$ และ $(1,6,2)$ ตามลำดับ) ในทำนองเดียวกัน $\overrightarrow{25}$ ต้องอยู่ใน 3–วงจร $(2,5,4)$ และสุดท้าย $\overrightarrow{26}$ ต้องอยู่ใน 3–วงจร $(2,6,5)$ ดังนั้นเส้นเชื่อมที่เหลือคือ $\overrightarrow{35}$ $\overrightarrow{36}$ $\overrightarrow{46}$ $\overrightarrow{53}$ $\overrightarrow{63}$ และ $\overrightarrow{64}$ ซึ่งพบว่าไม่สามารถนำเส้นเชื่อมเหล่านี้มาจัดให้เป็น 3–วงจรได้ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

<u>กรณีที่ 2</u> มีสอง 3–วงจรตรงข้ามกันที่มี 1 อยู่ในทั้งสองวงจรนั้น

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้สอง 3–วงจรดังกล่าวคือ $(1,2,3)$ และ $(1,3,2)$ สังเกตว่าไม่สามารถมีสองวงจรตรงข้ามกันที่มี 1 อยู่ในทั้งสองวงจรนั้นเกิน 1 คู่ได้ ดังนั้นจะได้ 3–วงจรที่เหลือที่มี 1 ปรากฏอยู่ต้องเป็น $(1,4,5)$ กับ $(1,5,6)$ และ $(1,6,4)$ ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์กรณีที่ 1 $\overrightarrow{24}$ ต้องอยู่ใน 3–วงจร $(2,4,6)$ ในขณะที่ $\overrightarrow{25}$ ต้องอยู่ใน 3–วงจร $(2,5,4)$ และสุดท้าย $\overrightarrow{26}$ และอยู่ใน 3–วงจร $(2,6,5)$ โดยเหลือเส้นเชื่อมคือ $\overrightarrow{34}$ $\overrightarrow{35}$ $\overrightarrow{36}$ $\overrightarrow{43}$ $\overrightarrow{53}$ และ $\overrightarrow{63}$ ซึ่งพบว่าไม่สามารถนำเส้นเชื่อมเหล่านี้มาจัดให้เป็น 3–วงจรได้ จึงเกิดข้อขัดแย้ง จากทั้งสองกรณีพบว่าไม่สามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_6^* ออกเป็น 3–วงจรได้

■

ในตัวอย่างที่ 3 และตัวอย่างที่ 4 แสดงรูปแบบการจัดการแข่งขันดังกล่าว เมื่อมีทีมเข้าแข่งขัน 9 ทีม และ 10 ทีม ตามลำดับ

<u>ตัวอย่างที่</u> <u>3</u> แสดงรูปแบบการจัดการแข่งขันที่ทีมชนะคือทีมที่เก่งที่สุดอย่างแท้จริง เมื่อมีทีมเข้าแข่งขัน 9 ทีม

(1, 5, 9)	(1, 9, 5)	(3, 9, 7)	(3, 7, 9)
(2, 8, 7)	(2, 7, 8)	(2, 4, 1)	(2, 1, 4)
(3, 4, 6)	(3, 6, 4)	(5, 6, 8)	(5, 8, 6)
ชั้นขนานที่1	ชั้นขนานที่2	ชั้นขนานที่3	ชั้นขนานที่4
(2, 6, 9)	(2, 9, 6)	(4, 9, 8)	(4, 8, 9)
(1, 3, 8)	(1, 8, 3)	(3, 5, 2)	(3, 2, 5)
(4, 5, 7)	(4, 7, 5)	(6, 7, 1)	(6, 1, 7)
ชั้นขนานที่5	ชั้นขนานที่6	ชั้นขนานที่7	ชั้นขนานที่8

<u>ตัวอย่างที่</u> <u>4</u> แสดงรูปแบบการจัดการแข่งขันที่ทีมชนะคือทีมที่เก่งที่สุดอย่างแท้จริง เมื่อมีทีมเข้าแข่งขัน 10 ทีม

(10, 1, 5)	(10, 1, 9)	(10, 5, 9)	(10, 2, 8)	(10, 2, 7)	(10, 8, 7)
(10, 3, 4)	(10, 3, 6)	(10, 4, 6)	(1, 9, 5)	(2, 7, 8)	(3, 6, 4)
(3, 9, 7)	(2, 4, 1)	(5, 6, 8)	(3, 7, 9)	(2, 1, 4)	(5, 8, 6)
(2, 6, 9)	(1, 3, 8)	(4, 5, 7)	(2, 9, 6)	(1, 8, 3)	(4, 7, 5)
(4, 9, 8)	(3, 5, 2)	(6, 7, 1)	(4, 8, 9)	(3, 2, 5)	(6, 1, 7)

สำหรับตัวอย่างที่ 3 นั้น เนื่องจาก $v = 9$ สอดคล้องกับ $v \equiv 3 \pmod 6$ ดังนั้นจึงสามารถแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดออกเป็น 3–วงจร และสามารถจัดเป็นชั้นขนานได้อีกด้วย ซึ่งทำให้นอกจากจะได้ทีมที่เก่งที่สุดอย่างแท้จริงแล้ว ถ้าให้ชั้นขนานแทนการแข่งขันในหนึ่งวัน พบว่าในแต่ละวันทุกทีมจะได้แข่งขันทั้งหมดและการแข่งขันจะสิ้นสุดลงในเวลาเพียง 8 วันเท่านั้น ยิ่งถ้าแต่ละทีมแข่งได้เพียงวันละ 1 นัดเท่านั้น แล้วจำนวนวันเท่านี้ถือเป็นจำนวนวันที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ จำนวนวันที่น้อยนี้นำมาซึ่งค่าใช้จ่ายที่ลดลง นั่นหมายความว่าการจัดการแข่งขันลักษณะนี้ทำให้ได้ผู้ชนะที่ดีที่สุด ในเวลาที่สั้นสุด และเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ 3 ให้วิธีการจัดการแข่งขันกีฬาที่แต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง 3 ทีมประเภทที่มีการบุกและการตั้งรับ ซึ่งทำให้ผู้ชนะเลิศจากการแข่งขันรายการนี้คือผู้ที่มีความสามารถดีที่สุด ทั้งนี้จำนวนทีมที่เข้าแข่งขันต้องเป็น v ทีม โดยที่ $v \neq 6$ และ $v \equiv 0, 1, 3$ หรือ $4 \pmod 6$

แนวคิดนี้สามารถขยายผลไปสู่การจัดการแข่งขันกีฬาในรายการที่มีทีมเข้าร่วม n ทีม โดยที่การแข่งขันแต่ละนัดเป็นการแข่งขันระหว่าง m ทีม ($m < n$) ประเภทที่มีการบุกและการตั้งรับ เพื่อให้ได้ผู้ชนะที่มีความเป็นเลิศที่สุดในกีฬาชนิดนั้นได้ ด้วยการหาวิธีการแบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมใน K_n^* ออกเป็น m –วงจร

เอกสารอ้างอิง

Barnier N. & Brisset P. (2002). Solving the Kirkman's schoolgirl problem in a few seconds. In *Proceedings of the 8th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*. (pp. 477–491). London: Springer-Verlag.

Bermond J.C. (1974). An application of the solution of Kirkman's schoolgirl problem: The decomposition of the symmetric oriented complete graph into 3–circuits, *Disc. Math., 8*, 301–304.

Gardner M. (1997). Dinner guest, Schoolgirls and Handcuffed prisoners, *The Last Recreations*, (pp. 121-138). New York: Springer–Verlag.

Kirkman T. P. (1850). Qurery VI*, Ladies's and Gentleman's Diary* , *48*.

Li X.Y. (2011). A new method of constructing Kirkman triple system. In *Proceedings of the 2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. (pp. 4237–4242). Beijing: IEEE Conference Publications.

Ray-Chaudhuri D.K. & Wilson R.M. (1971). Solution of Kirkman's school-girl problem, *Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.*, *19*, 187–204.

Steiner J. (1853). Combinatorische Aufgabe, *J. Reine Angew. Math., 45*, 181–182.

Stinson D.R. & Vanstone S.A. (1985). Some non-isomorphic Kirkman triple systems of orders 39 and 51, *Utilitas Math.*, *27*, 199–205.

Wallis W.D. (2007). *Introduction to combinatorial designs*, 2nd Edition, (pp. 179–195). Florida: Chapman & Hall.