กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไป

Generalized Euler Function Graphs

ปริญญาภรณ์ สมัยสงค์, สุพัฒน์ตรา ชมชิด และ สิริพงศ์ ศิริสุข*

Parinyaporn Samaisong, Supattra Chomchid and Siripong Sirisuk*

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

Received : 18 April 2022

Revised : 6 June 2022

Accepted : 10 June 2022

บทคัดย่อ

ให้ n และ d เป็นจำนวนเต็มบวก และ $D(n,d) := \{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+(n-1)d\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k ที่เป็นตัวหารของ n เรานิยามกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท (n,d,k) ให้เป็นกราฟที่มีเซตจุดยอดคือเซตของจำนวนเต็มบวก a ใน $D(n,d)$ ที่ซึ่งตัวหารร่วมมากของ a และ n เท่ากับ k และสองจุดยอด a และ b ประชิดกันก็ต่อเมื่อตัวหารร่วมมากของ a และ b เท่ากับ k กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,1)$ คือกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ที่ได้มีการศึกษามาแล้ว ในงานวิจัยนี้ เราสนใจศึกษากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ และ $(n,1,k)$ เราศึกษาสมบัติของจุดยอด ดีกรี และความเชื่อมโยงของกราฟ รวมถึงศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟดังกล่าวกับกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์และกราฟออยเลอร์

คำสำคัญ : ตัวหารร่วมมาก ; กราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ; กราฟตัวหาร

Abstract

Let n and d be positive integers and $D(n,d) := \{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+(n-1)d\}$. For a positive divisor k of n, we define the generalized Euler function graph of type (n,d,k) to be the graph whose vertex set is the set of integers a in $D(n,d)$ where the greatest common divisor of a and n is k, and two vertices a and b are adjacent if and only if the greatest common divisor of a and b is k. The generalized Euler function graph of type $(n,1,1)$ is the Euler function graph which has already been studied. In this research, we focus on studying the generalized Euler function graphs of types $(n,d,1)$ and $(n,1,k)$. We explore properties of vertices, degree and connectivity of the graphs. Moreover, we present relationships among those graphs, relatively prime graphs and Eulerian graphs.

Keywords : greatest common divisor ; relatively prime graph ; divisor graph

***Corresponding author. E-mail** : siripong@mathstat.sci.tu.ac.th

บทนำ

ทฤษฎีกราฟในทางคณิตศาสตร์ได้ถูกประยุกต์เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาปัญหาต่าง ๆ อาทิ เทคโนโลยี วิทยาศาสตร์กับธรรมชาติ และอื่น ๆ อีกมาก จึงได้มีการศึกษา วิจัย และพัฒนาความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟมาอย่างต่อเนื่อง กราฟในทางทฤษฎีกราฟโดยเบื้องต้นประกอบไปด้วยจุดยอด และเส้นเชื่อมที่เกิดจากการประชิดกันของสองจุดยอด การศึกษากราฟโดยใช้สมบัติในทางทฤษฎีจำนวนได้ถูกศึกษาอย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะกราฟที่เกี่ยวข้องกับตัวหารร่วมมาก (greatest common divisors, $\gcd$) ในปี ค.ศ.1983 Pomerence (Pomerance, 1983) นิยามกราฟตัวหาร (divisor graph) โดยเซตของจุดยอดคือเซต S ของจำนวนเต็มบวกที่ $S \neq \emptyset$ และสองจุดยอด m และ n ที่แตกต่างกันใน S ประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ $\gcd(m,n) = \min\{m,n\}$

จากสมบัติที่เราทราบกันดีว่า $\gcd(m,n) \geq 1$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m และ n ทำให้ Pomerence (Pomerance, 1983) นิยามกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime graph) โดยให้เซตของจุดยอดคือเซต S ของจำนวนเต็มบวกที่ $S \neq \emptyset$ เช่นเดียวกับจุดยอดของกราฟตัวหาร แต่เงื่อนไขการประชิดกันของจุดยอดเปลี่ยนแปลงเป็น สองจุดยอด m และ n ที่แตกต่างกันใน S ประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ $\gcd(m,n) = 1$ หรือกล่าวว่า ประชิดกันเมื่อ m และ n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

นอกจากนี้ยังมีการวิจัยใช้ฟังก์ชันทอเทียนต์ออยเลอร์ (Euler totient function) หรือฟังก์ชันออยเลอร์ (Euler function) ในทางทฤษฎีจำนวนในการศึกษากราฟ เช่น กราฟเคย์เลย์ (Cayley graph) หรือที่เรียกว่ากราฟเคย์เลย์ทอเทียนต์ออยเลอร์ (Euler totient Cayley graph) ให้ S แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n กราฟเคย์เลย์ทอเทียนต์ออยเลอร์ $(\mathbb{Z}_n, \phi)$ เป็นกราฟที่มีเซตจุดยอดเป็นกรุป $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ ของจำนวนเต็มมอดุโล n โดยสองจุดยอด a และ b ที่แตกต่างกันใน $\mathbb{Z}_n$ ประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ $a-b$ หรือ $b-a$ เป็นสมาชิกของ S สมบัติต่าง ๆ ของกราฟเคย์เลย์ทอเทียนต์ออยเลอร์ถูกศึกษาตามมาอย่างกว้างขวาง (Madhavi, 2002; Manjuri & Maheswari, 2012; Manjuri & Maheswari, 2013; Sangeetha, 2015)

Shanmugavelan (Shanmugavelan, 2017) ได้ศึกษากราฟฟังก์ชันออยเลอร์ (Euler function graphs) $G(\phi(n))$ ซึ่งมีเซตของจุดยอดคือเซตของจำนวนเต็มบวก a ซึ่ง $1 \leq a \leq n$ และ $\gcd(n,a) = 1$ และสองจุดยอด a และ b ที่แตกต่างกันประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ $\gcd(a,b) = 1$ เห็นได้ชัดว่าจำนวนจุดยอดของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์เท่ากับ $\phi(n)$ Shanmugavelan ได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ เช่น ดีกรี จำนวนครอบงำ รวมถึงความสัมพันธ์ของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์และกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ในงานวิจัยนี้ เราวางนัยทั่วไปกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ โดยนำเสนอกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท (n,d,k) ซึ่งในกรณีที่ $d = k = 1$ กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,1)$ คือกราฟเดียวกันกับกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ใน (Shanmugavelan, 2017) โดยในบทความนี้เรานำเสนอความรู้พื้นฐานของทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีกราฟที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยในวิธีการดำเนินการวิจัย และในส่วนท้ายของวิธีการดำเนินวิจัยนี้ เรานิยามกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท(n,d,k)สำหรับผลลัพธ์ของงานวิจัยนี้เราศึกษากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไป 2 ประเภทซึ่งแบ่งการนำเสนอเป็น 2 ตอน และเราวิจารณ์ผลการวิจัยและสรุปผลการวิจัยในท้ายที่สุด

วิธีดำเนินการวิจัย

เราดำเนินการวิจัยโดยศึกษาความรู้พื้นฐานของทฤษฎีจำนวนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย เช่น ตัวหารร่วมมาก จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และฟังก์ชันออยเลอร์ เป็นต้น โดยอ้างอิงจาก (Burton, 1998; Koshy, 2007) และนำเสนอดังต่อไปนี้

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $a \neq 0$ เราเขียน $a \mid b$ ในกรณีที่ b หารด้วย a ลงตัว และเขียน $a \nmid b$ ในกรณีที่ b หารด้วย a ไม่ลงตัว เราเขียนแทน *ตัวหารร่วมมาก (greatest common divisor)* ของ a และ b ด้วย $\gcd(a,b)$ ในกรณีที่ $\gcd(a,b) = 1$ เรากล่าวว่าจำนวนเต็มบวก a และ b เป็น*จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime)* นอกจากนี้ สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\gcd(a,b) = 1$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม x และ y ที่ทำให้ $ax + by = 1$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด $\phi(n) = |\{ a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq n$ และ $\gcd(n,a) = 1\}|$ เราเรียก ϕ ซึ่งนิยามบนจำนวนเต็มบวกว่า *ฟังก์ชันออยเลอร์ (Euler function)* เห็นชัดว่า $\phi(1) = \phi(2) = 1$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 3$ จะได้ว่า $\phi(n)$ เป็นจำนวนคู่ นอกจากนี้ถ้า $n = ab$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ แล้ว $\phi(n) = \phi(a)\phi(b)$ และถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $n = p_1^{t_1}\ p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $t_1, t_2, \ldots, t_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า $\phi(n) = \left(p_1^{t_1} - p_1^{t_1-1}\right)\left(p_2^{t_2} - p_2^{t_2-1}\right) \cdots \left(p_k^{t_k} - p_k^{t_k-1}\right)$

ลำดับถัดไป เรานำเสนอบทนิยาม ทฤษฎีบทและความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับกราฟ โดยอ้างอิงจาก (West, 2001; Wilson, 1985)

กราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือ *กราฟ (graph)* $G = (V, E)$ ประกอบด้วยเซต $V := V(G)$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และเซต $E := E(G)$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $\binom{V}{2}$ โดยที่ $\binom{V}{2}$ คือเซตของเซตย่อยทั้งหมดของ V ที่มีสมาชิก 2 ตัว เราเรียกสมาชิกในเซต V ว่า *จุดยอด (vertex)* และ เรียกสมาชิกในเซต E ว่า *เส้นเชื่อม (edge)* เราเรียกกราฟที่มีจุดยอดเดียวว่า *กราฟชัด (trivial graph)* และในบางครั้ง เราเขียนแทนเส้นเชื่อม $\{u, v\} \in E$ ด้วย uv ในกรณีที่ $e = uv$ เป็นเส้นเชื่อมของกราฟ G เรากล่าวว่า u *ประชิดกับ* v และกล่าวว่าจุดยอด u ตกกระทบกับ e *ดีกรี (degree)* ของจุดยอด v ในกราฟ G เขียนแทนด้วย $\deg v$ คือจำนวนของเส้นเชื่อมใน G ที่ตกกระทบกับ v นอกจากนี้ *ดีกรีมากที่สุด (maximum degree)* ในกราฟ G คือดีกรีที่มากที่สุดของจุดยอดใน G เขียนแทนด้วย $\Delta(G)$

ต่อไปเรากล่าวถึงกราฟออยเลอร์ โดยเราแนะนำแนวเดิน รอยเดิน และรอยเดินปิดของกราฟ ให้ u และ v เป็นจุดยอดใด ๆ ในกราฟ G เราเรียกลำดับ $u = u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 0, u_0, u_1, \ldots, u_n$ เป็นจุดยอดของ G และ $e_i = u_{i-1}u_i$ เป็นเส้นเชื่อมของ G ทุก ๆ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ว่า *แนวเดิน* $u - v$ *($u - v$ walk)* เราเรียกแนวเดิน $u - v$ ที่เส้นเชื่อมทั้งหมดแตกต่างกันว่า *รอยเดิน (trail)* และเราเรียกรอยเดินที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเป็นจุดยอดเดียวกันว่า *รอยเดินปิด (close trail)* สำหรับกราฟที่มีรอยเดินปิดที่ประกอบไปด้วยทุกเส้นเชื่อมของกราฟถูกเรียกว่า *กราฟออยเลอร์ (Eulerian graph)* และเราเรียกกราฟที่ทุก ๆ จุดยอด u และ v จะมีแนวเดิน $u - v$ เสมอ ว่า*กราฟเชื่อมโยง (connected graph)* ทั้งนี้เราสามารถพิจารณาว่ากราฟเชื่อมโยงใดเป็นกราฟออยเลอร์ได้ง่ายขึ้นด้วยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1 (West, 2001) *ให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง จะได้ว่า G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ จุดยอดทุกจุดของ G มีดีกรีเป็นจำนวนคู่*

ให้ G เป็นกราฟ เราเรียกเซตย่อย D ที่ไม่เป็นเซตว่างของ $V(G)$ ว่า *เซตครอบงำ (dominating set)* ของ G ถ้าแต่ละจุดยอดใน $V(G) \setminus D$ ประชิดกับจุดยอดใน D อย่างน้อย 1 จุด และเราเรียกจำนวนสมาชิกของเซตครอบงำของ G ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดว่า *จำนวนครอบงำ (domination number)* ของ G

ให้ $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ เรากล่าวว่ากราฟ G_1 เป็น *กราฟย่อย (subgraph)* ของกราฟ G_2 ถ้า $V(G_1) \subseteq V(G_2)$ และ $E(G_1) \subseteq E(G_2)$ และเรากล่าวว่า G_1 *สมสัณฐาน (isomorphic)* กับ G_2 เขียนแทนด้วย $G_1 \cong G_2$ ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $f: V_1 \to V_2$ ซึ่ง ทุก ๆ $u, v \in V_1$, u ประชิดกับ v ใน G_1 ก็ต่อเมื่อ $f(u)$ ประชิดกับ $f(v)$ ใน G_2

ในส่วนสุดท้ายนี้ เรานำเสนอการวางนัยทั่วไปของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ใน (Shanmugavelan, 2017) ดังนี้

ให้ n และ d เป็นจำนวนเต็มบวก และกำหนดเซต $D(n,d) := \{1, 1+d, 1+2d, \dots, 1+(n-1)d\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k ที่เป็นตัวหารของ n เรานิยาม *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท (n,d,k) (generalized Euler function graph of type (n,d,k))* เขียนแทนด้วย $G(\phi_k(n,d))$ ให้เป็นกราฟที่มีเซตของจุดยอดคือ

$$V(G(\phi_k(n,d))) = \{a \mid a \in D(n,d) \text{ และ } \gcd(n,a) = k\}$$

และเซตของเส้นเชื่อมคือ

$$E(G(\phi_k(n,d))) = \{ab \mid a, b \in V(G(\phi_k(n,d))) \text{ ซึ่ง } a \neq b \text{ และ } \gcd(a,b) = k\}$$

กล่าวคือ สองจุดยอด a และ b ใด ๆ ในกราฟประชิดกันก็ต่อเมื่อ $\gcd(a,b) = k$

เห็นได้ชัดว่ากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,1)$ หรือกราฟ $G(\phi_1(n,1))$ คือกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ $G(\phi(n))$ ใน (Shanmugavelan, 2017) งานวิจัยนี้ เราสนใจศึกษากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ และประเภท $(n,1,k)$ โดยนำเสนอผลการวิจัยเป็น 2 ส่วนตามลำดับ เราศึกษาสมบัติของจำนวนจุดยอด ดีกรี และความเชื่อมโยงของกราฟ รวมถึงศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างกราฟดังกล่าวกับกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์และกราฟออยเลอร์

ผลการวิจัย

3.1 กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$

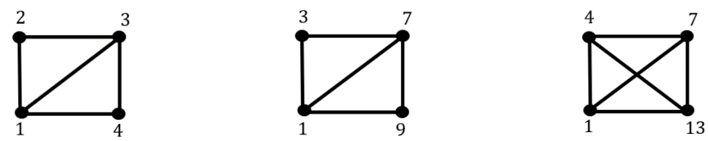
เรานำเสนอสมบัติของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $G(\phi_1(n,d))$ หรือ $G(\phi(n,d))$ เพื่อความสะดวก ซึ่งคือกราฟที่มีเซตของจุดยอดคือ

$$V(G(\phi(n,d))) = \{a \mid a \in D(n,d) \text{ และ } \gcd(n,a) = 1\}$$

และเซตของเส้นเชื่อมคือ

$$E(G(\phi(n,d))) = \{ab \mid a, b \in V(G(\phi(n,d))) \text{ ซึ่ง } a \neq b \text{ และ } \gcd(a,b) = 1\}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 กราฟ $G(\phi(5,d))$ โดยที่ $d = 1, 2{,}3$ แสดงได้ดังนี้



$G(\phi(5{,}1))$ $G(\phi(5{,}2))$ $G(\phi(5{,}3))$

Figure 1 Examples of generalized Euler function graphs of type $(n, d, 1)$

นอกจากนี้เราสังเกตได้ว่า ถ้า d เป็นจำนวนคี่กราฟ $G(\phi(2,d))$ เป็นกราฟชัด ส่วนกรณีที่ d เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $V(G(\phi(2,d))) = \{1{,}1+d\}$ และ $E(G(\phi(2,d))) = \{\{1{,}1+d\}\}$

จากนิยามของกราฟ $G(\phi(n,d))$ จำนวนจุดยอดของกราฟ $G(\phi(n,d))$ คือ

$$|\{a \mid a \in D(n,d) \text{ และ } \gcd(n,a) = 1\}|$$

เราเขียนแทนจำนวนจุดยอดนี้ด้วย $\phi(n,d)$ โดย Garcia (Garcia & Ligh, 1983) ได้ศึกษาจำนวน $\phi(n,d)$ นี้ ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้ดังนี้

บทตั้ง 3.1.2 (Garcia & Ligh, 1983) *ให้ m, n และ d เป็นจำนวนเต็มบวก*

1. $\phi(n,1) = \phi(n)$
2. *ถ้า* $\gcd(n,d) = 1$ *แล้ว* $\phi(n,d) = \phi(n)$
3. *ถ้า* $\gcd(m,n) = 1$ *แล้ว* $\phi(mn,d) = \phi(m,d)\phi(n,d)$

บทตั้ง 3.1.3 (Garcia & Ligh, 1983) *ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ k และ d เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า*

$$\phi(p^k,d) = \begin{cases} p^k & ;\ p \mid d \\ p^k\left(1-\dfrac{1}{p}\right) & ;\ p \nmid d \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 3.1.4 *ให้ d เป็นจำนวนเต็มบวก $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า*

$$\phi(n,d)=\begin{cases} n & ;\ p_i \mid d \text{ ทุก ๆ } i\in\{1,2,\dots,k\} \\ n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) & ;\ p_i \nmid d \text{ ทุก ๆ } i\in\{1,2,\dots,k\} \\ n\prod_{j=t+1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) & ;\ \text{มีจำนวนเต็มบวก } t \text{ ที่ } t<k \text{ ซึ่ง } p_i \mid d \text{ ทุก ๆ } i\in\{1,2,\dots,t\} \text{ และ } p_j \nmid d \text{ ทุก ๆ } j\in\{t+1,2,\dots,k\} \end{cases}$$

พิสูจน์ สำหรับกรณี $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i\in\{1,2,\dots,k\}$ และกรณี $p_i \nmid d$ ทุก ๆ $i\in\{1,2,\dots,k\}$ ถูกพิสูจน์ไว้แล้วใน (Garcia & Ligh, 1983) ดังนั้นเราสมมติให้ มีจำนวนเต็มบวก t ที่ $t<k$ ซึ่ง $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i\in\{1,2,\dots,t\}$ และ $p_j \nmid d$ ทุก ๆ $j\in\{t+1,t+2,\dots,k\}$ โดยบทตั้ง 3.1.2 และ 3.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\phi(n,d) &= \phi\left(d, p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_t^{a_t}p_{t+1}^{a_{t+1}}p_{t+2}^{a_{t+2}}\cdots p_k^{a_k}\right)\\ &= \phi\left(d,p_1^{a_1}\right)\phi\left(d,p_2^{a_2}\right)\cdots\phi\left(d,p_t^{a_t}\right)\phi\left(d,p_{t+1}^{a_{t+1}}\right)\phi\left(d,p_{t+2}^{a_{t+2}}\right)\cdots\phi\left(d,p_k^{a_k}\right)\\ &= p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_t^{a_t}p_{t+1}^{a_{t+1}}\left(1-\frac{1}{p_{t+1}}\right)p_{t+2}^{a_{t+2}}\left(1-\frac{1}{p_{t+2}}\right)\cdots p_k^{a_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\ &= p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_t^{a_t}p_{t+1}^{a_{t+1}}p_{t+2}^{a_{t+2}}\cdots p_k^{a_k}\left(1-\frac{1}{p_{t+1}}\right)\left(1-\frac{1}{p_{t+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\ &= n\prod_{j=t+1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\end{aligned}$$

ตามต้องการ □

เราพิจารณาความเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ของจำนวนจุดยอด $\phi(n,d)$ ซึ่งเป็นประโยชน์ในการศึกษากราฟออยเลอร์

บทแทรก 3.1.5 *ให้ n และ d เป็นจำนวนเต็มบวก*

1. *ถ้า $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1,p_2,\dots,p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน และ $a_1,a_2,\dots,a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มี $l\in\{1,2,\dots,k\}$ ซึ่ง $p_l \nmid d$*
2. *ถ้า $n=2q$ โดยที่ q เป็นจำนวนคี่ แล้วจะได้ว่า $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ d เป็นจำนวนคู่ หรือ $\phi(q,d)$ เป็นจำนวนคู่*
3. *ถ้า $n=2^tq$ โดยที่ q เป็นจำนวนคี่ และ $t\ge 2$ จะได้ว่า $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคู่*

พิสูจน์ 1. ถ้า $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i\in\{1,2,\dots,k\}$ จากทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า $\phi(n,d)=n$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ในทางกลับกัน สมมติ มี $l\in\{1,2,\dots,k\}$ ซึ่ง $p_l \nmid d$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราสมมติให้ มีจำนวนเต็ม t ที่ $0\le t<k$ ซึ่ง $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i\in\{1,2,\dots,t\}$ และ $p_j \nmid d$ ทุก ๆ $j\in\{t+1,t+2,\dots,k\}$ จะได้ว่า

$$\phi(n,d)=n\prod_{j=t+1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_t^{a_t}p_{t+1}^{a_{t+1}-1}(p_{t+1}-1)p_{t+2}^{a_{t+2}-1}(p_{t+2}-1)\cdots p_k^{a_k-1}(p_k-1)$$

เป็นจำนวนคู่ เนื่องจาก p_{t+1} เป็นจำนวนเฉพาะคี่

2. จากบทตั้ง 3.1.2 (3) เราได้ว่า $\phi(n,d)=\phi(2q,d)=\phi(2,d)\phi(q,d)$ ดังนั้น ถ้า d เป็นจำนวนคี่และ $\phi(q,d)$ เป็นจำนวนคี่ จากบทตั้ง 3.1.3 จะได้ว่า $\phi(2,d)=1$ ส่งผลให้ $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคี่ ในทางกลับกัน ถ้า d เป็นจำนวนคู่ โดยบทตั้ง 3.1.3 จะได้ว่า $\phi(2,d)=2$ ดังนั้น $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคู่ และเห็นได้ชัดว่า ถ้า $\phi(q,d)$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคู่

3. พิจารณา $\phi(2^t,d)$ บทตั้ง 3.1.3 แสดงไว้ว่าถ้า d เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\phi(2^t,d)=2^t$ และถ้า d เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\phi(2^t,d)=2^{t-1}$ เนื่องจาก $t\geq 2$ ดังนั้น $\phi(2^t,d)$ เป็นจำนวนคู่ เพราะฉะนั้น $\phi(n,d)=\phi(2^tq,d)=\phi(2^t,d)\phi(q,d)$ เป็นจำนวนคู่ □

ในลำดับถัดไปเรานำเสนอสมบัติของดีกรีในกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$

ทฤษฎีบท 3.1.6 *ให้ d และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า ดีกรีที่มากที่สุดของ $G(\phi(n,d))$ เท่ากับ*

$$\Delta(G(\phi(n,d)))=\phi(n,d)-1$$

พิสูจน์ สังเกตว่า $\Delta(G(\phi(n,d)))\leq |V(G(\phi(n,d)))|-1=\phi(n,d)-1$ พิจารณาจุดยอด 1 ในกราฟ $G(\phi(n,d))$ ให้ a เป็นจุดยอดใด ๆ ใน $V(G(\phi(n,d)))\setminus\{1\}$ เนื่องจาก $\gcd(1,a)=1$ ดังนั้นจุดยอด 1 ประชิดกับทุกจุดยอดในเซต $V(G(\phi(n,d)))\setminus\{1\}$ ดังนั้น $\deg 1=|V(G(\phi(n,d)))\setminus\{1\}|=\phi(n,d)-1$ เนื่องจาก $\Delta(G(\phi(n,d)))\leq\phi(n,d)-1$ และ $\deg 1=\phi(n,d)-1$ เราจึงสรุปได้ว่า ดีกรีที่มากที่สุดของ $G(\phi(n,d))$ เท่ากับ $\phi(n,d)-1$ □

ข้อสังเกต 3.1.7 จากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.1.6 เราสังเกตได้ว่าจุดยอด 1 ในกราฟ $G(\phi(n,d))$ เป็นจุดยอดที่มีดีกรีมากที่สุดซึ่ง $\deg 1=\phi(n,d)-1$

กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ มีความสัมพันธ์กับกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ซึ่งนิยามโดย Pomerance (Pomerance, 1983) กำหนดให้ $S\subseteq\mathbb{Z}^+$ ที่ $S\neq\emptyset$ *กราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime graph)* เขียนแทนด้วย $RP(S)$ คือกราฟที่มีเซตของจุดยอด $V(RP(S))=S$ และเซตของเส้นเชื่อมคือ

$$E(RP(S))=\{ab \mid a,b\in S \text{ ซึ่ง } a\neq b \text{ และ } \gcd(a,b)=1\}$$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของเส้นเชื่อมของกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์และ $G(\phi(n,d))$ เราจึงได้สมบัติต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.8 *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ เป็นกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์*

แต่กราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นกราฟ $G(\phi(n,d))$

ตัวอย่าง 3.1.9 ให้ $S=\{1,2,3\}$ พิจารณากราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ $RP(S)$ ซึ่ง $V(RP(S))=\{1,2,3\}$ และ $E(RP(S))=\{12,13,23\}$ เราจะแสดงว่า $RP(S)$ ไม่เป็นกราฟ $G(\phi(n,d))$ โดยการพิสูจน์ว่า ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และ d ใด ๆ $V(RP(S))\neq V(G(\phi(n,d)))$ ดังนั้น ให้ n และ d เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ พิจารณา $D(n,d)=\{1,1+d,\ldots,1+$

$(n-1)d\}$ จาก $V(G(\phi(n,d))) \subseteq D(n,d)$ จะเห็นว่าถ้า $n=1$ หรือ $n=2$ จะได้ว่า $|D(n,d)|=1$ หรือ 2 ตามลำดับ ดังนั้น $V(RP(S)) \neq V(G(\phi(n,d)))$ เราจึงสมมติว่า $n \geq 3$ ในกรณีที่ $d \neq 1$ จะได้ว่า $1+td>2$ ทุก ๆ $t=\{1,2,\dots,n-1\}$ ดังนั้น $2 \notin D(d,n)$ ทำให้ได้ว่า$V(G(\phi(n,d))) \neq \{1,2,3\}$ พิจารณากรณี $d=1$ จากบทตั้ง 3.1.2 เราได้ว่า $|V(G(\phi(n,1)))| = \phi(n,1) = \phi(n)$ เนื่องจาก $n \geq 3$ เราได้ว่า $\phi(n)$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $V(G(\phi(n,d))) \neq \{1,2,3\}$ เพราะฉะนั้นกราฟ $RP(S)$ ไม่เป็นกราฟ $G(\phi(n,d))$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และ d

นอกเหนือจากสมบัติข้างต้นเราสามารถพิจารณาความเป็นกราฟชัดได้ดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.10 *ให้ $n \geq 3$ และ d เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $G(\phi(n,d))$ ไม่เป็นกราฟชัด*

พิสูจน์ ให้ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณี 1: $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i \in \{1,2,\dots,k\}$ จากทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า $\phi(n,d) = n \geq 3$

กรณี 2: $p_i \nmid d$ ทุก ๆ $i \in \{1,2,\dots,k\}$ จากทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า

$$\phi(n,d) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = p_1^{a_1-1}p_2^{a_2-1}\cdots p_k^{a_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1) \geq 2$$

กรณี 3: สมมติให้ มีจำนวนเต็มบวก t ที่ $t<k$ ซึ่ง $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i \in \{1,2,\dots,t\}$ และ $p_j \mid d$ ทุก ๆ $j \in \{t+1,t+2,\dots,k\}$ จากทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า

$$\phi(n,d) = n\prod_{i=t+1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_t^{a_t}p_{t+1}^{a_{t+1}-1}(p_{t+1}-1)p_{t+2}^{a_{t+2}-1}(p_{t+2}-1)\cdots p_k^{a_k-1}(p_k-1) \geq 2$$

จากทั้ง 3 กรณี จะเห็นว่าจำนวนจุดยอดของ $G(\phi(n,d))$ มากกว่าหรือเท่ากับ 2 ดังนั้น $G(\phi(n,d))$ ไม่เป็นกราฟชัด □

นอกเหนือจากกรณีของกราฟชัดเราพบว่ากราฟ $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟเชื่อมโยง

ทฤษฎีบท 3.11 *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ เป็นกราฟเชื่อมโยง*

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่าเมื่อ $n \in \{1,2\}$ กราฟ $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟเชื่อมโยง ให้ $n \geq 3$ และ d เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ในการพิสูจน์ว่า $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟเชื่อมโยง เราให้ a และ b เป็นสองจุดยอดที่แตกต่างกัน

กรณี 1: $a=1$ หรือ $b=1$ จะได้ว่า $\gcd(a,b)=1$ ดังนั้น a ประชิดกับ b นั่นคือ a, ab, b เป็นแนวเดิน $a-b$

กรณี 2: $a \neq 1$ และ $b \neq 1$ เราพิจารณาจุดยอด 1 ใน $V(G(\phi(n,d)))$ เนื่องจาก $\gcd(a,1) = 1 = \gcd(b,1)$ เพราะฉะนั้นทั้ง a และ b ประชิดกับ 1 ดังนั้น $a, a1, 1, 1b, b$ เป็นแนวเดิน $a-b$

จากทั้งสองกรณี เราจึงสรุปได้ว่า ทุก ๆ สองจุดยอดใด ๆ ที่แตกต่างกัน มีแนวเดินถึงกันเสมอ ดังนั้น $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟเชื่อมโยง □

จากความเป็นกราฟเชื่อมโยงของกราฟ $G(\phi(n,d))$ เราพิจารณาจำนวนครอบงำของกราฟได้ดังนี้

บทแทรก 3.1.12 *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ มีจำนวนครอบงำเท่ากับ* 1

พิสูจน์ เห็นชัดว่า ถ้า $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟชัด จะมีจำนวนครอบงำเท่ากับ 1 สมมติว่า $G(\phi(n,d))$ ไม่เป็นกราฟชัด ดังนั้นมีจุดยอดอื่น ๆ นอกเหนือจากจุดยอด 1 จะเห็นว่า ถ้า a เป็นจุดยอดใน $V(G(\phi(n,d)))$ ที่ไม่ใช่ 1 จะได้ว่า $\gcd(a,1)=1$ ดังนั้น 1 ประชิดกับทุกจุดยอดที่เหลือในกราฟ จึงได้ว่า $\{1\}$ เป็นเซตครอบงำที่เล็กที่สุด เพราะฉะนั้น จำนวนครอบงำของ $G(\phi(n,d))$ เท่ากับ 1 □

จากการที่กราฟ $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟเชื่อมโยง เราสามารถศึกษาความเป็นกราฟออยเลอร์ได้จากดีกรีของจุดยอดตามบทตั้ง 2.1 เนื่องจากกราฟ $G(\phi(1,d))$ เป็นกราฟชัดจึงเป็นกราฟออยเลอร์ เช่นเดียวกัน กราฟ $G(\phi(2,d))$ เมื่อ d เป็นจำนวนคี่เป็นกราฟชัดจึงเป็นกราฟออยเลอร์ ในกรณีที่ d เป็นจำนวนคู่ กราฟ $G(\phi(2,d))$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เนื่องจากมีจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ เราจึงได้ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.13 *$G(\phi(2,d))$ เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ d เป็นจำนวนคี่*

สำหรับ $n \geq 3$ เราได้สมบัติเกี่ยวกับกราฟออยเลอร์ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.14 *ให้ $n \geq 3$ และ d เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้*

1. *$n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1,p_2,\dots,p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน $a_1,a_2,\dots,a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และมี $l \in \{1,2,\dots,k\}$ ซึ่ง $p_l \nmid d$*
2. *$n = 2p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1,p_2,\dots,p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน $a_1,a_2,\dots,a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ d เป็นจำนวนคู่ หรือ มี $l \in \{1,2,\dots,k\}$ ซึ่ง $p_l \nmid d$*
3. *$n = 2^t q$ โดยที่ q เป็นจำนวนคี่ และ $t \geq 2$*

แล้วจะได้ว่า $G(\phi(n,d))$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.1.11 $G(\phi(n,d))$ เป็นกราฟเชื่อมโยง เราจึงพิจารณาจุดยอด 1 ใน $G(\phi(n,d))$ จากข้อสังเกต 3.1.7 จะได้ว่า $\deg 1 = \phi(n,d) - 1$ ดังนั้นเมื่อ n และ d สอดคล้องกับข้อ 1, 2 หรือ 3 แล้วบทแทรก 3.1.5 แสดงไว้ว่า $\phi(n,d)$ เป็นจำนวนคู่ เพราะฉะนั้น $\deg 1$ เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น มีจุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ จากบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า $G(\phi(n,d))$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ □

จากกรณีเฉพาะที่กราฟ $G(\phi(n,1))$ คือกราฟเดียวกันกับกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ $G(\phi(n))$ ดังนั้นเราจึงได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.1.15 *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์ $G(\phi(n))$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ทุก ๆ $n \geq 3$*

สำหรับกรณี $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1,p_2,\dots,p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน $a_1,a_2,\dots,a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i \in \{1,2,\dots,k\}$ จะได้ว่า $G(\phi(n,d))$ อาจจะเป็นหรือไม่เป็นกราฟออยเลอร์ก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.16 กราฟ $G(\phi(15,30))$ เป็นกราฟออยเลอร์เนื่องจากทุกจุดยอดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ ในขณะที่กราฟ $G(\phi(15,60))$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เนื่องจากจุดยอด 121 มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ ดังรูป

$G(\phi(15,30))$ $G(\phi(15,60))$

Figure 2 The graphs $G(\phi(15,30))$ and $G(\phi(15,60))$

สำหรับกรณี $n = 2p_1^{a_1}p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ โดยที่ $p_1, p_2, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ที่แตกต่างกัน $a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก d เป็นจำนวนคี่ และ $p_i \mid d$ ทุก ๆ $i \in \{1,2,\dots,k\}$ จะได้ว่า $G(\phi(n,d))$ อาจจะเป็นหรือไม่เป็นกราฟออยเลอร์ก็ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.17 กราฟ $G(\phi(18,15))$ เป็นกราฟออยเลอร์เนื่องจากทุกจุดยอดมีดีกรีเป็นจำนวนคู่ ในขณะที่กราฟ $G(\phi(18,3))$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เนื่องจากจุดยอด 7 มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ ดังรูป

$G(\phi(18,15))$ $G(\phi(18,3))$

Figure 3 The graphs $G(\phi(18,15))$ and $G(\phi(18,3))$

สังเกตว่ากราฟฟังก์ชันออยเลอร์และกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n, d, 1)$ ที่ศึกษามานี้นั้นถูกนิยามและศึกษาผ่านเงื่อนไขที่ตัวหารร่วมมากของสองจำนวนเท่ากับ 1 ในตอนถัดไป เรานำเสนอกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปอีกประเภท คือประเภท $(n, 1, k)$ ซึ่งนิยามและศึกษาโดยเงื่อนไขที่ตัวหารร่วมมากของสองจำนวนไม่เท่ากับ 1

3.2 กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n, 1, k)$

กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n, 1, k)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $G(\phi_k(n, 1))$ หรือ $G(\phi_k(n))$ เพื่อความสะดวก คือกราฟที่มีเซตของจุดยอดคือ

$$V(G(\phi_k(n))) = \{a \in \mathbb{Z}^+ \mid 1 \le a \le n \text{ และ } \gcd(n, a) = k\}$$

และเซตของเส้นเชื่อมคือ

$$E(G(\phi_k(n))) = \{ab \mid a, b \in V(G(\phi_k(n))) \text{ ซึ่ง } a \ne b \text{ และ } \gcd(a, b) = k\}$$

ในกรณีที่ $k = 1$ กราฟ $G(\phi_k(n))$ คือกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ $G(\phi(n))$ ใน (Shanmugavelan, 2017) นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.2.1 ตัวอย่างกราฟ $G(\phi_k(n))$

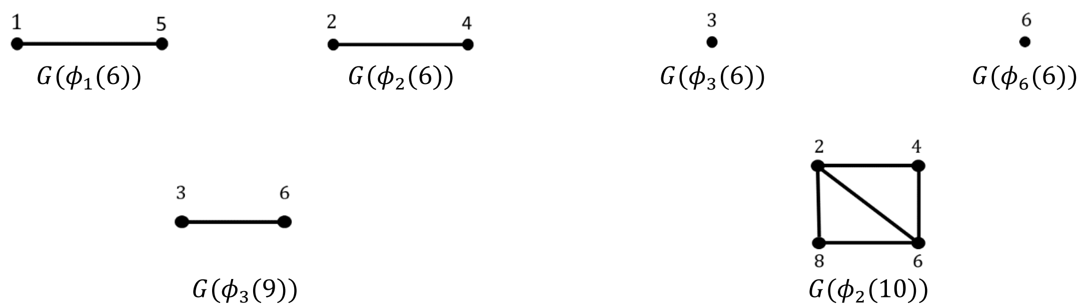


Figure 4 Examples of generalized Euler function graphs of type $(n, 1, k)$

เราพบว่ากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n, 1, k)$ และกราฟฟังก์ชันออยเลอร์มีความสัมพันธ์กันดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2.2 *ให้* n *และ* k *เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง* $k \mid n$ *จะได้ว่า*

$$G(\phi_k(n)) \cong G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$$

พิสูจน์ นิยาม $f: V(G(\phi_k(n))) \to V(G(\phi(\frac{n}{k})))$ กำหนดโดย $f(a) = \frac{a}{k}$ ให้ $a \in V(G(\phi_k(n)))$ ดังนั้น $1 \le a \le n$ และ $\gcd(n, a) = k$ เพราะฉะนั้น $1 \le \frac{a}{k} \le \frac{n}{k}$ และ $\gcd\left(\frac{n}{k}, \frac{a}{k}\right) = 1$ จึงทำให้ $\frac{a}{k} \in V(G(\phi(\frac{n}{k})))$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามดีแล้ว ให้ a และ b เป็นจุดยอดใน $G(\phi_k(n))$ ซึ่ง $f(a) = f(b)$ ดังนั้น $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$ จึงได้ว่า $a = b$ สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ในการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เราให้ $b \in V(G(\phi(\frac{n}{k})))$ จะได้ว่า $1 \le b \le \frac{n}{k}$ และ $\gcd(\frac{n}{k}, b) = 1$ ดังนั้น มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $\frac{n}{k}x + by = 1$ นั่นคือ $nx + bky = k$ สังเกตว่า $1 \le kb \le n$ ต่อไป เราแสดงว่า $\gcd(n, kb) = k$ เห็นชัดว่า $k \mid kb$ และ $k \mid n$ ให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $l \mid kb$ และ $l \mid n$ จาก $nx + bky = k$ ดังนั้น $l \mid k$ สรุปได้ว่า $\gcd(n, kb) = k$ เพราะฉะนั้น $kb \in V(G(\phi_k(n)))$ และ $f(kb) = \frac{kb}{k} = b$ จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ a และ b เป็นจุดยอดใน $V(G(\phi_k(n)))$ นั่นคือ $\frac{a}{k}$ และ $\frac{b}{k}$ เป็นจุดยอดใน $G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ จะได้ว่า a ประชิดกับ b ใน $G(\phi_k(n))$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd(a,b)=k$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right)=1$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{a}{k}$ ประชิดกับ $\frac{b}{k}$ ใน $G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ ดังนั้น f เป็นสมสัณฐานของกราฟ นั่นคือ $G(\phi_k(n))$ สมสัณฐานกับ $G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ ตามต้องการ □

เราทราบว่ากราฟฟังก์ชันออยเลอร์ $G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ คือกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(\frac{n}{k},1,1)$ ที่ได้ศึกษาในตอนที่ 3.1 ดังนั้น ทฤษฎีบท 3.2.2 ทำให้เราสรุปสมบัติบางประการของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,k)$ โดยประยุกต์ใช้สมบัติของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ $G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ ซึ่งคือกราฟ $G\left(\phi\left(\frac{n}{k},1\right)\right)$ ที่ศึกษาในตอนที่ 3.1 ได้

บทแทรก 3.2.3 *จำนวนจุดยอดของกราฟ $G(\phi_k(n))$ คือ $\phi\left(\frac{n}{k}\right)$*

บทแทรก 3.2.4 *กราฟ $G(\phi_k(n))$ เป็นกราฟชัด ก็ต่อเมื่อ $n=k$ หรือ $n=2k$*

จากทฤษฎีบท 3.1.6 และข้อสังเกต 3.1.7 จุดยอด 1 เป็นจุดยอดที่มีดีกรีมากที่สุดในกราฟ $G\left(\phi\left(\frac{n}{k},1\right)\right)$ และ $\Delta G\left(\phi\left(\frac{n}{k},1\right)\right)=\phi\left(\frac{n}{k},1\right)-1$ สมบัตินี้และทฤษฎีบท 3.2.2 ส่งผลให้ได้ว่า จุดยอด k เป็นจุดยอดที่มีดีกรีมากที่สุดในกราฟ $G(\phi_k(n))$ กล่าวคือเราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2.5 *ดีกรีที่มากที่สุดของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,k)$ คือ $\Delta G(\phi_k(n))=\phi\left(\frac{n}{k}\right)-1$*

จากทฤษฎีบท 3.1.11 เราจึงได้

บทแทรก 3.2.6 *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,k)$ เป็นกราฟเชื่อมโยง*

นอกเหนือจากสมบัติข้างต้น เราสามารถพิสูจน์ความเป็นกราฟออยเลอร์ของกราฟ $G(\phi_k(n))$ ได้ดังนี้

บทแทรก 3.2.7 *กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,k)$ เป็นกราฟออยเลอร์ก็ต่อเมื่อ $n=k$ หรือ $n=2k$*

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.2.2 เรามีว่า $G(\phi_k(n))\cong G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ สมมติ $n\neq k$ และ $n\neq 2k$ เพราะฉะนั้น $\frac{n}{k}\geq 3$ จากบทแทรก 3.1.15 จะได้ว่า $G\left(\phi\left(\frac{n}{k}\right)\right)$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะฉะนั้น $G(\phi_k(n))$ จึงไม่เป็นกราฟออยเลอร์ ในทางกลับกัน บทแทรก 3.2.4 แสดงไว้ว่าถ้า $n=k$ หรือ $n=2k$ แล้ว $G(\phi_k(n))$ เป็นกราฟชัดซึ่งเป็นกราฟออยเลอร์ □

วิจารณ์ผลการวิจัย

กราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,d,1)$ และกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n,1,k)$ มีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับจุดยอดและความสัมพันธ์หารร่วมมากของจุดยอดในกราฟ เราเห็นได้ว่าทฤษฎีจำนวนมีบทบาทสำคัญอย่างมากในการศึกษาสมบัติของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไป ดังนั้นจึงถือได้ว่ากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปเป็นกราฟที่เชื่อมโยงคณิตศาสตร์สองแขนง อันได้แก่ ทฤษฎีกราฟและทฤษฎีจำนวนเข้าด้วยกัน เพราะฉะนั้นกราฟทั้งสองประเภทจึงเป็นกราฟที่น่าสนใจในการศึกษาสมบัติอื่น ๆ ยิ่งไปกว่านั้นกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท (n,d,k) ในกรณีอื่น ๆ ยังเป็นหัวข้อเปิดที่สามารถศึกษา ขยายและต่อยอดงานวิจัยต่อไปได้ในอนาคต

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ เราได้นิยามกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท (n, d, k) ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปกราฟกราฟฟังก์ชันออยเลอร์ที่ได้มีการศึกษามาแล้วใน (Shanmugavelan, 2017) เราได้นำเสนอสมบัติของกราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปประเภท $(n, d, 1)$ และ $(n, 1, k)$ ซึ่งได้แก่ จำนวนของจุดยอด ดีกรีที่มากที่สุดของกราฟ บทสรุปว่ากราฟฟังก์ชันออยเลอร์วางนัยทั่วไปทั้ง 2 ประเภทเป็นกราฟเชื่อมโยงและมีความสัมพันธ์สมสัณฐานกัน รวมไปถึงความสัมพันธ์ระหว่างกราฟดังกล่าวกับกราฟจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์และกราฟออยเลอร์

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นผลงานวิจัยที่ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัย ประเภทนักวิจัยรุ่นใหม่ จากกองทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ตามเลขที่สัญญา 3/2565 ผู้แต่งขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้ นอกจากนี้ ผู้แต่งขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้ให้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะต่าง ๆ เพื่อปรับปรุงบทความวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

Burton, D.M. (1998). *Elementary Number Theory*. New York: MacGraw-Hill.

Garcia, P.G., & Ligh, S. (1983). A generalization of Euler's ϕ-Function. *Fibonacci Quart.*, *21*, 26-28.

Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications*. (2nd edition). Boston: Mass.

Madhavi, L. (2002). *Studies on Domination Parameters and Enumeration of Cycles in Some Arithmetic Graphs*. Ph.D. Thesis. Tirupati: S.V. University.

Manjuri, M., & Maheswari, B. (2012). Matching dominating sets of Euler-Totient-Cayley graphs. *IJCER.*, *2*, 103-107.

Manjuri, M., & Maheswari, B. (2013). Clique dominating sets of Euler totient Cayley graphs. *IOSR-JM.*, *4*, 46-49.

Pomerance, C. (1983). On the longest simple path in the divisor graph. *Congr. Numer.*, *40*, 291-304.

Sangeetha, K.J., & Maheswari, B. (2015). Edge domination in Euler-Totient-Cayley graph. *IJSER.*, *3*, 14-17.

Shanmugavelan, S. (2017). The Euler function graph $G(\phi(n))$. *Int. J. Pure Appl. Math.*, *116*, 45-48.

West, D.B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. New Jersey: Prentice Hall.

Wilson, R.J. (1985). *Introduction to Graph Theory*. New York: Longman.