วารสารวิทยาศาสตร์บูรพา ปีที่ 27 (ฉบับที่ 3) กันยายน – ธันวาคม พ.ศ. 2565
BURAPHA SCIENCE JOURNAL Volume 27 (No.3) September – December 2022 บทความวิจัย

ขอบเขตสำหรับจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck, k)$

Bounds for the 2-Domination Number of Generalized Petersen Graphs $P(ck, k)$

ญาณิศา ชัยยา*, จิตสุภา ศรีสวัสดิ์, ณัฐณิชา ถนอมงาม และ ณัฐวดี บุตรถาวร
Yanisa Chaiya*, Jitsupa Srisawat, Natnicha Thanomngam and Nattawadee Butthaworn
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science and Technology, Thammasat University

Received : 31 January 2022
Revised : 14 March 2022
Accepted : 8 April 2022

บทคัดย่อ

ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟ เซตย่อย D ของ V จะเป็นเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ G ถ้าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D และจะเรียกจำนวนสมาชิกของเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ G ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดว่าจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟ G บทความวิจัยนี้ จะหาขอบเขตของจำนวน 2-โดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck, k)$ โดยที่ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $c \geq 3$

คำสำคัญ : กราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป ; เซต 2-โดมิเนติง ; จำนวน 2-โดมิเนชัน

Abstract

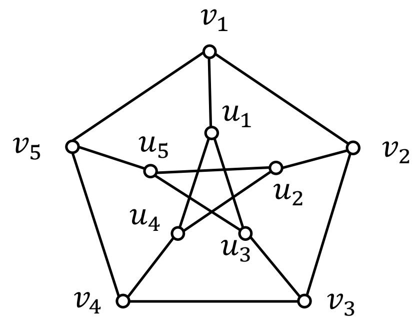
Let $G = (V, E)$ be a graph. A subset D of V is a *2-dominating set* of G if each vertex in $V - D$ is adjacent to at least 2 vertices in D. The *2-domination number* of G is the smallest cardinality of a 2-dominating set of G. In this paper, we give a lower bound and an upper bound on the 2-domination number of generalized Petersen graphs $P(ck, k)$, where c and k are integers in which $c \geq 3$.

Keywords : generalized Petersen graphs ; 2-dominating sets ; 2-domination number

***Corresponding author. E-mail** : yanisa@mathstat.sci.tu.ac.th

บทนำ

กราฟพีเตอร์เซน (*Petersen graph*) คือ กราฟเชิงเดียวที่มีจุดยอด 10 จุดและเส้นเชื่อม 15 เส้น โดยที่จุดยอดแต่ละจุดมีระดับขั้นเท่ากับ 3 ดังรูปที่ 1



ภาพที่ 1 กราฟพีเตอร์เซน

กราฟดังกล่าวสร้างขึ้นในปี ค.ศ. 1898 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวเดนมาร์กนามว่า Julius Petersen (Petersen, 1898) ซึ่งหลังจากที่กราฟพีเตอร์เซนสร้างขึ้นได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านนำกราฟนี้มาเป็นตัวอย่างและตัวอย่างค้านในทฤษฎีต่าง ๆ ทางด้านทฤษฎีกราฟ

โดยในปี ค.ศ. 1950 Donald Coxeter *(*Coxeter, 1950*)* ได้สร้าง *กราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป* (*generalized Petersen graph*) เขียนแทนด้วย $P(n,k)$ ซึ่งเป็นกราฟ 3-ปรกติ ที่มีจำนวนจุดยอดเท่ากับ $2n$ โดยที่ $n > 2k$ ซึ่งเซตของจุดยอดคือ $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_n\}$ และเซตของเส้นเชื่อมคือ $E = \bigcup_{i=1}^{n}\{v_iu_i,\ v_iv_{i+1},\ u_iu_{i+k}\}$ เมื่อพิจารณาเลขดัชนีมอดุโล n และจากนิยามดังกล่าวจะเห็นได้ว่ากราฟพีเตอร์เซนคือกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(5,2)$

ให้ $G = (V,E)$ เป็นกราฟที่มี V เป็นเซตของจุดยอด และ E เป็นเซตของเส้นเชื่อม จะเรียกเซตย่อย D ของ V ว่า *เซตโดมิเนติง* (*dominating set*) ของกราฟ G ถ้าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยหนึ่งจุดใน D นอกจากนี้จะเรียกจำนวนสมาชิกของเซตโดมิเนติงของกราฟ G ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุดว่า *จำนวนโดมิเนชัน* (*domination number*) ของกราฟ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\gamma(G)$ ด้วยหลักการและแนวคิดที่คล้ายคลึงกันสามารถนิยามเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ G ได้ กล่าวคือถ้าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D แล้วจะเรียก D ว่า *เซต 2-โดมิเนติง* (*2-dominating set*) ของกราฟ G และ*จำนวน 2-โดมิเนชัน* (*2-domination number*) ของกราฟ G คือจำนวนสมาชิกของเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ G ที่มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุด เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\gamma_2(G)$ จากการนิยามดังกล่าวจะได้ว่า ถ้า D เป็นเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ G แล้ว D จะเป็นเซตโดมิเนติงของกราฟ G เป็นผลให้จำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟ G จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับจำนวนโดมิเนชันของกราฟ G

จำนวนโดมิเนชันและจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(n,k)$ ได้รับการศึกษาอย่างกว้างขวาง

และต่อเนื่องยาวนานกว่า 10 ปี โดยเริ่มต้นในปี ค.ศ. 2008 Arash และคณะ (Arash *et al*., 2008) ได้ศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตบนของจำนวนโดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(n,k)$ และผลลัพธ์คือ $\gamma(P(n,k)) \leq \left\lceil\frac{3n}{5}\right\rceil$ สำหรับทุก n ที่เป็นจำนวนเต็มคี่และ $n \geq 3$ นอกจากนี้ยังได้เสนอข้อความคาดการณ์ว่าขอบเขตบนที่ได้เป็นค่าจริงของจำนวนโดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(n,k)$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2009 Ebrahimi และคณะ (Ebrahimi *et al*., 2009) ได้ศึกษาจำนวนโดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(n,k)$ เมื่อ $1 \leq k \leq 3$ โดยที่จำนวนโดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(n,2)$ มีผลลัพธ์เดียวกันกับ Fu และคณะ (Fu *et al*., 2009) และ Yang และคณะ (Yang *et al*., 2009) โดยที่ Yang และคณะ ได้พิสูจน์ข้อความคาดการณ์ของ Arash และคณะ ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Zhao และคณะ (Zhao *et al*., 2010) ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนโดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck,k)$ โดยที่ $c \geq 3$ และได้แสดงว่า $\gamma\big(P(3k,k)\big) = \left\lceil\frac{5k}{3}\right\rceil$ สำหรับทุก k ที่ $k \geq 1$ และ $\gamma\big(P(4k,k)\big) = 2k$ สำหรับทุก k ที่เป็นจำนวนเต็มคี่

นอกจากนี้ในปี ค.ศ. 2013 Cheng (Cheng, 2013) ได้ศึกษาเกี่ยวกับจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(n,k)$ ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 จำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไปที่ Cheng ศึกษา

กราฟ	**จำนวน 2-โดมิเนชัน**
$P(n,1)$	n
$P(5k,5t+2)$	$4k$ เมื่อ $k > 0$ และ $0 \leq t < k$
$P(5k,5t+3)$	$4k$ เมื่อ $k > 0$ และ $0 \leq t < k$
$P(5k+3,2)$	$4k+3$ เมื่อ $k > 0$
$P(5k+4,2)$	$4k+4$ เมื่อ $k > 0$
$P(6,2)$	6
$P(7,2)$	7

ต่อมาในปี ค.ศ. 2018 Bakhshesh และคณะ (Bakhshesh *et al*., 2018) ได้พิสูจน์ว่าจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(5k+1,2)$ และ $P(5k+2,2)$ สำหรับทุก $k > 0$ มีค่าเท่ากับ $4k+2$ และ $4k+3$ ตามลำดับ และได้แสดงว่าจำนวน 2-โดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(2k,k)$ และ $P(5k+4,3)$ มีค่าเท่ากับ $2k$ และ $4k+4$ ตามลำดับ นอกจากนี้ยังได้หาขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวน 2-โดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(5k+1,3), P(5k+2,3)$ และ $P(5k+3,3)$ สำหรับทุก $k > 0$ ซึ่งได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$4k+1 \leq \gamma_2\big(P(5k+1,3)\big) \leq 4k+2$$
$$4k+2 \leq \gamma_2\big(P(5k+2,3)\big) \leq 4k+3$$
$$4k+3 \leq \gamma_2\big(P(5k+3,3)\big) \leq 4k+4$$

มากไปกว่านั้นยังได้เสนอข้อความคาดการณ์ว่า $\gamma_2\big(P(5k+1,3)\big) = 4k+2,\ \gamma_2\big(P(5k+2,3)\big) = 4k+3$ และ $\gamma_2\big(P(5k+3,3)\big) = 4k+4$ ต่อมาในปี ค.ศ. 2020 Chen และ Zhao (Chen *et al*., 2020) ได้พิสูจน์ว่าจำนวน 2-โดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(5k+1,3), P(5k+2,3)$ และ $P(5k+3,3)$ มีค่าเท่ากับ $4k+2$, $4k+3$ และ $4k+4$ ตามลำดับ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ของ Baskhshesh และคณะ

ในบทความวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยให้ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวน 2-โดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck,k)$ โดยที่ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $c \geq 3$

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยมีขั้นตอนการดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. ค้นคว้าเอกสาร ตำรา วารสาร และเอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยด้านจำนวนโดมิเนชันของกราฟ
2. ศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนโดมิเนชันที่มีอยู่ในเอกสารและงานวิจัยที่ค้นคว้า
3. หาเซต 2-โดมิเนติงของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck,k)$ ในกรณีที่ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกน้อย ๆ และหารูปแบบของเซต 2-โดมิเนติงในกรณีทั่วไป
4. พิสูจน์รูปแบบในข้อ 3 และสรุปเป็นบทตั้งและทฤษฎีบทซึ่งนำเสนอในหัวข้อถัดไป

ผลการวิจัย

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผลที่ได้จากการศึกษา ซึ่งคือการหาขอบเขตของจำนวน 2-โดมิเนชันสำหรับกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck,k)$ เมื่อ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $c \geq 3$ โดยการศึกษาขอบเขตบนจะแบ่งออกเป็น 4 กรณีดังนี้

-- c เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

-- c เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

-- c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

-- c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

และการศึกษาขอบเขตล่างจะพิจารณาที่ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $c \geq 3$

ในที่นี้เมื่อพิจารณา $D \subseteq V$ และ $w \in V - D$ ถ้า w ประชิดกับจุดยอดใน D อย่างน้อย 2 จุด แล้วจะกล่าวว่า w *ถูก 2-โดมิเนตโดย* D *(w is 2-dominated by D)*

บทตั้ง 1 *ถ้า c เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว* $\gamma_2(P(ck,k)) \leq ck$

พิสูจน์ สมมติ c เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ $c = 2m+1$ และ $k = 2n+1$ ในที่นี้จะพิสูจน์โดยการสร้างเซต 2-โดมิเนติง D ของกราฟ $P(ck,k)$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$$D = \left\{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{ck-3}{2}\right\} \cup \{v_{ck-1}\} \cup \left\{u_{2j} : 1 \leq j \leq \frac{ck-3}{2}\right\} \cup \{u_{ck}\}$$

จะเห็นได้ว่าสมาชิกในเซต D ประกอบไปด้วยจุดยอด v_i ที่ i เป็นจำนวนเต็มคี่และ $i \neq ck$ และจุดยอด u_j ที่ j จำนวนเต็มคู่ และ $j \neq ck-1$ และได้ว่า

$$V - D = \left\{v_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{ck-3}{2}\right\} \cup \{v_{ck}\} \cup \left\{u_{2j+1} : 0 \leq j \leq \frac{ck-3}{2}\right\} \cup \{u_{ck-1}\}$$

จะแสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D ให้ $w \in V - D$

กรณีที่ 1: $w \in \left\{v_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{ck-3}{2}\right\}$ ได้ว่า มีจำนวนเต็ม i ซึ่ง $1 \leq i \leq \frac{ck-3}{2}$ ที่ $w = v_{2i}$ จึงได้ว่าจุดยอด v_{2i} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ v_{2i-1}, v_{2i+1} และ u_{2i} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $v_{2i+1} \in D$ และจุดยอด $u_{2i} \in D$ ดังนั้นจุดยอด v_{2i} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 2: $w = v_{ck}$ จะได้ว่าจุดยอด v_{ck} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ v_{ck-1}, v_1 และ u_{ck} จะเห็นได้ว่าจุดยอด $v_{ck-1} \in D$ และจุดยอด $u_{ck} \in D$ ดังนั้นจุดยอด v_{ck} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 3: $w \in \left\{u_{2j+1} : 0 \leq j \leq \frac{ck-3}{2}\right\}$ ได้ว่ามีจำนวนเต็ม j ซึ่ง $0 \leq j \leq \frac{ck-3}{2}$ ที่ $w = u_{2j+1}$ จะได้ว่าจุดยอด u_{2j+1} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ u_{2j+1-k}, u_{2j+1+k} และ v_{2j+1} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $v_{2j+1} \in D$ แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีย่อย 3.1: $0 \leq j \leq \frac{ck-(k+4)}{2}$ พิจารณาจุดยอด u_{2j+1+k} เนื่องจาก $k = 2n+1$ ดังนั้น

$$2j+1+k = 2j+1+(2n+1) = 2j+2n+2 = 2(j+n+1)$$

โดยที่ $j+n+1 \in \mathbb{Z}$ พิจารณา $j+n+1$ เนื่องจาก $n \geq 0$ จึงได้ว่า $0 \leq j \leq j+n+1 \leq \frac{ck-(k+4)}{2} + \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{ck-3}{2}$ ดังนั้นจุดยอด $u_{2j+1+k} \in D$ นั่นคือจุดยอด u_{2j+1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีย่อย 3.2: $\frac{ck-(k+4)}{2} < j \leq \frac{ck-3}{2}$ พิจารณาจุดยอด u_{2j+1-k} เนื่องจาก $k = 2n+1$ ดังนั้น

$$2j+1-k = 2j+1-(2n+1) = 2j-2n = 2(j-n) \text{ โดยที่ } j-n \in \mathbb{Z}$$

พิจารณา $j-n$ จะได้ว่า $0 \leq \frac{(c-2)k-1}{2} = \left(\frac{ck-(k+4)}{2}+1\right) - \left(\frac{k-1}{2}\right) \leq j-n \leq j \leq \frac{ck-3}{2}$ ดังนั้นจุดยอด $u_{2j+1-k} \in D$ นั่นคือจุดยอด u_{2j+1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 4: $w = u_{ck-1}$ จะได้ว่าจุดยอด u_{ck-1} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ u_{ck-1-k}, u_{ck-1+k} และ v_{ck-1} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $v_{ck-1} \in D$ พิจารณาจุดยอด u_{ck-1+k} ซึ่งแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีย่อย 4.1: $k = 1$ จะได้ว่า $u_{ck-1+k} = u_{ck} \in D$ ดังนั้นจุดยอด u_{ck-1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีย่อย 4.2*:* $k \geq 2$ เนื่องจาก $ck - 1 + k \equiv k - 1\ (mod\ ck)$ ดังนั้นจุดยอด $u_{ck-1+k} = u_{k-1}$ และ $u_{k-1} \neq u_{ck-1}$ จึงได้ว่าจุดยอด $u_{k-1} = u_{(2n+1)-1} = u_{2n} \in D$ ดังนั้นจุดยอด u_{ck-1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

จากทั้ง 4 กรณีจะเห็นได้ว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D จึงสรุปได้ว่า D เป็นเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ $P(ck, k)$ เมื่อ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และได้ว่า

$$|D| = \left(\frac{ck-1}{2}\right) + 1 + \left(\frac{ck-3}{2}\right) + 1 = ck$$

ดังนั้น $\gamma_2\big(P(ck,k)\big) \leq |D| = ck$ #

บทตั้ง 2 *ถ้า* c *เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ* k *เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ แล้ว* $\gamma_2\big(P(ck,k)\big) \leq ck$

พิสูจน์ สมมติ c เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ $c = 2m + 1$ และ $k = 2n$ ในที่นี้จะพิสูจน์โดยการสร้างเซต 2-โดมิเนติง D ของกราฟ $P(ck, k)$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$$D = \left\{v_{2i+1} :\ 0 \leq i \leq \tfrac{ck-2}{2}\right\} \cup \left\{u_{2j} :\ 1 \leq j \leq \tfrac{k}{2}\right\} \cup \left\{u_{j+2sk} : 1 \leq j \leq k \text{ และ } 1 \leq s \leq \tfrac{c-1}{2}\right\}$$

จะเห็นได้ว่าสมาชิกในเซต D ประกอบไปด้วยจุดยอด v_i ที่ i เป็นจำนวนเต็มคี่ และได้ว่า

$$V - D = \left\{v_{2i} :\ 1 \leq i \leq \tfrac{ck}{2}\right\} \cup \left\{u_{2j+1} :\ 0 \leq j \leq \tfrac{k-2}{2}\right\} \cup \left\{u_{j+(2s+1)k} : 1 \leq j \leq k \text{ และ } 1 \leq s \leq \tfrac{c-3}{2}\right\}$$

จะแสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D ให้ $w \in V - D$

กรณีที่ 1: $w \in \left\{v_{2i} :\ 1 \leq i \leq \frac{ck}{2}\right\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม i ซึ่ง $1 \leq i \leq \frac{ck}{2}$ ที่ $w = v_{2i}$ จึงได้ว่าจุดยอด v_{2i} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ v_{2i-1}, v_{2i+1} และ u_{2i} พิจารณาจุดยอด $v_{2i-1} = v_{2i-2+1} = v_{2(i-1)+1}$ เนื่องจาก $1 \leq i \leq \frac{ck}{2}$ จึงได้ว่า $0 \leq i - 1 \leq \frac{ck-2}{2}$ ดังนั้นจุดยอด $v_{2i-1} \in D$ พิจารณาจุดยอด v_{2i+1} ถ้า $1 \leq i \leq \frac{ck-2}{2}$ จะได้ว่า $v_{2i+1} \in D$ และถ้า $i = \frac{ck}{2}$ จะได้ว่า $v_{2i+1} = v_{2\left(\frac{ck}{2}\right)+1} = v_{ck+1} = v_1 \in D$ ดังนั้นจุดยอด $v_{2i+1} \in D$ นั่นคือจุดยอด v_{2i} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 2: $w \in \left\{u_{2j+1} :\ 0 \leq j \leq \frac{k-2}{2}\right\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j ซึ่ง $0 \leq j \leq \frac{k-2}{2}$ ที่ $w = u_{2j+1}$ จึงได้ว่าจุดยอด u_{2j+1} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ u_{2j+1-k}, u_{2j+1+k} และ v_{2j+1} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $v_{2j+1} \in D$ ต่อไปจะพิจารณาจุดยอด u_{2j+1-k} เนื่องจาก

$$2j + 1 - k \equiv (c-1)k + 2j + 1 (mod\ ck)$$

ดังนั้นจุดยอด $u_{2j+1-k} = u_{(c-1)k+2j+1}$ เนื่องจาก $0 \leq j \leq \frac{k-2}{2}$ จึงได้ว่า $1 \leq 2j + 1 \leq k - 1$ สรุปได้ว่าจุดยอด $u_{2j+1-k} \in D$ ดังนั้นจุดยอด u_{2j+1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 3: $w \in \{u_{j+k}, u_{j+3k}, \ldots, u_{j+(c-2)k} : 1 \leq j \leq k\}$ แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีย่อย 3.1: $w \in \{u_{j+k} : 1 \leq j \leq k\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j ซึ่ง $1 \leq j \leq k$ ที่ $w = u_{j+k}$ จึงได้ว่าจุดยอด u_{j+k} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ u_j, u_{j+2k} และ v_{j+k} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $u_{j+2k} \in D$ และแบ่งเป็น 2 กรณีย่อยดังนี้

กรณีย่อย 3.1.1: $j \in \{1,3,5,\dots,k-1\}$ พิจารณาจุดยอด v_{j+k} เนื่องจาก j เป็นจำนวนเต็มคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้นจุดยอด v_{j+k} มีเลขดัชนีเป็นจำนวนเต็มคี่ นั่นคือจุดยอด $v_{j+k} \in D$ ดังนั้นจุดยอด u_{j+k} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีย่อย 3.1.2: $j \in \{2,4,6,\dots,k\}$ พิจารณาจุดยอด u_j เนื่องจาก j เป็นจำนวนเต็มคู่ นั่นคือ $u_j \in D$ ดังนั้นจุดยอด u_{j+k} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีย่อย 3.2: $w \in \{u_{j+3k}, u_{j+5k} \dots, u_{j+(c-2)k} : 1 \leq j \leq k\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม p ซึ่ง $1 \leq p \leq m-1$ ที่ $w = u_{j+(2p+1)k}$ จึงทำให้ได้ว่าจุดยอด $u_{j+(2p+1)k}$ จะประชิดกับจุดยอดทั้งหมดสามจุด ได้แก่ $u_{j+(2p+1)k-k}$, $u_{j+(2p+1)k+k}$ และ $v_{j+(2p+1)k}$ จากการกำหนดเซต D จะได้ว่า $u_{j+2qk} \in D$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม q ที่ $1 \leq q \leq m$ ดังนั้นพิจารณาจุดยอด $u_{j+(2p+1)k-k} = u_{j+2pk} \in D$ และจุดยอด $u_{j+(2p+1)k+k} = u_{j+2(p+1)k}$ เนื่องจาก $1 \leq p \leq m-1$ จึงได้ว่า $2 \leq p+1 \leq m$ ดังนั้นจุดยอด $u_{j+(2p+1)k+k} \in D$ สรุปได้ว่าจุดยอด $u_{j+(2p+1)k}$ ถูก 2-โดมิเนตโดย D

จากทั้ง 3 กรณีจะเห็นได้ว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D สรุปได้ว่า D เป็นเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ $P(ck,k)$ เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และได้ว่า

$$|D| = \frac{ck}{2} + \frac{k}{2} + \left(\frac{c-1}{2}\right)k = ck$$

ดังนั้น $\gamma_2\big(P(ck,k)\big) \leq |D| = ck$ #

บทตั้ง 3 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ แล้ว $\gamma_2(P(ck,k)) \leq ck$

พิสูจน์ สมมติ c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ $c = 2m$ และ $k = 2n+1$ ในที่นี้จะพิสูจน์โดยการสร้างเซต 2-โดมิเนติง D ของกราฟ $P(ck,k)$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$$D = \left\{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{ck-2}{2}\right\} \cup \left\{u_{2j} : 1 \leq j \leq \frac{ck}{2}\right\}$$

จะเห็นได้ว่าสมาชิกในเซต D ประกอบไปด้วยจุดยอด v_i ทุกจุดที่ i เป็นจำนวนเต็มคี่ และจุดยอด u_j ทุกจุดที่มี j เป็นจำนวนเต็มคู่ และได้ว่า

$$V - D = \left\{v_{2i} : 1 \leq i \leq \frac{ck}{2}\right\} \cup \left\{u_{2j+1} : 0 \leq j \leq \frac{ck-2}{2}\right\}$$

จะแสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D ให้ $w \in V - D$

กรณีที่ 1*:* $w \in \left\{v_{2i} :\ 1 \leq i \leq \frac{ck}{2}\right\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม i ซึ่ง $1 \leq i \leq \frac{ck}{2}$ ที่ $w = v_{2i}$ จึงได้ว่าจุดยอด v_{2i} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ v_{2i-1}, v_{2i+1} และ u_{2i} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $u_{2i} \in D$ พิจารณาจุดยอด v_{2i+1} ถ้า $1 \leq i \leq \frac{ck-2}{2}$ จะได้ว่า $v_{2i+1} \in D$ และถ้า $i = \frac{ck}{2}$ จะได้ว่า $v_{2i+1} = v_{2\left(\frac{ck}{2}\right)+1} = v_{ck+1} = v_1 \in D$ นั่นคือจุดยอด $v_{2i+1} \in D$ ดังนั้นจุดยอด v_{2i} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 2*:* $w \in \left\{u_{2j+1} :\ 0 \leq j \leq \frac{ck-2}{2}\right\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j ซึ่ง $0 \leq j \leq \frac{ck-2}{2}$ ที่ $w = u_{2j+1}$ จึงได้ว่าจุดยอด u_{2j+1} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ u_{2j+1-k}, u_{2j+1+k} และ v_{2j+1} ซึ่งจะเห็นได้ว่าจุดยอด $v_{2j+1} \in D$ แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีย่อยดังนี้

กรณีย่อย 2.1*:* $0 \leq j \leq \frac{ck-(k+1)}{2}$ พิจารณาจุดยอด u_{2j+1+k} เนื่องจาก $k = 2n + 1$ ดังนั้น

$$2j + 1 + k = 2j + 1 + (2n + 1) = 2(j + n + 1)$$

โดยที่ $j + n + 1 \in \mathbb{Z}$ พิจารณา $j + n + 1$ จะได้ว่า $0 \leq j \leq j + n + 1 \leq \frac{ck-(k+1)}{2} + \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{ck}{2}$ ดังนั้นจุดยอด $u_{2j+1+k} \in D$ นั่นคือจุดยอด u_{2j+1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีย่อย 2.2*:* $\frac{ck-(k+1)}{2} < j \leq \frac{ck-2}{2}$ พิจารณาจุดยอด u_{2j+1-k} เนื่องจาก $k = 2n + 1$ ดังนั้น

$$2j + 1 - k = 2j + 1 - (2n + 1) = 2(j - n)$$

โดยที่ $j - n \in \mathbb{Z}$ พิจารณา $j - n$ จะได้ว่า

$$2 \leq \frac{(c-2)k + 2}{2} = \left(\frac{ck - (k+1)}{2} + 1\right) - \left(\frac{k-1}{2}\right) \leq j - n \leq j \leq \frac{ck-2}{2}$$

ดังนั้นจุดยอด $u_{2j+1-k} \in D$ นั่นคือ จุดยอด u_{2j+1} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

จากทั้ง 2 กรณีจะเห็นได้ว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D จึงสรุปได้ว่า D เป็นเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ $P(ck, k)$ เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และได้ว่า

$$|D| = \frac{ck}{2} + \frac{ck}{2} = ck$$

ดังนั้น $\gamma_2\big(P(ck, k)\big) \leq |D| = ck$ #

บทตั้ง 4 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ แล้ว $\gamma_2\big(P(ck, k)\big) \leq ck$

พิสูจน์ สมมติ c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m และ n ที่ $c = 2m$ และ $k = 2n$ ในที่นี้จะพิสูจน์โดยการสร้างเซต 2-โดมิเนติง D ของกราฟ $P(ck, k)$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$$D = \left\{v_{2i+1} :\ 0 \leq i \leq \frac{ck-2}{2}\right\} \cup \{u_j, u_{j+2k}, u_{j+4k}, \dots, u_{j+(c-2)k} :\ 1 \leq j \leq k\}$$

จะเห็นได้ว่าสมาชิกในเซต D ประกอบไปด้วยจุดยอด v_i ทุกจุดที่มี i เป็นจำนวนเต็มคี่ และได้ว่า

$$V - D = \left\{v_{2i} : 1 \le i \le \frac{ck}{2}\right\} \cup \{u_{j+k}, u_{j+3k}, u_{j+5k}, \dots, u_{j+(c-1)k} : 1 \le j \le k\}$$

จะแสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D ให้ $w \in V - D$

กรณีที่ 1: $w \in \left\{v_{2i} : 1 \le i \le \frac{ck}{2}\right\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม i ซึ่ง $1 \le i \le \frac{ck}{2}$ ที่ $w = v_{2i}$ จึงได้ว่าจุดยอด v_{2i} จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ v_{2i-1}, v_{2i+1} และ u_{2i} พิจารณาจุดยอด $v_{2i-1} = v_{2i-2+1} = v_{2(i-1)+1}$ จาก $1 \le i \le \frac{ck}{2}$ ซึ่งได้ว่า $0 \le i - 1 \le \frac{ck-2}{2}$ ดังนั้นจุดยอด $v_{2i-1} \in D$ และพิจารณาจุดยอด v_{2i+1} ถ้า $1 \le i \le \frac{ck-2}{2}$ จะได้ว่า $v_{2i+1} \in D$ และถ้า $i = \frac{ck}{2}$ จะได้ว่า $v_{2i+1} = v_{2\left(\frac{ck}{2}\right)+1} = v_{ck+1} = v_1 \in D$ ดังนั้นจุดยอด v_{2i} ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีที่ 2: $w \in \{u_{j+k}, u_{j+3k}, u_{j+5k}, \dots, u_{j+(c-1)k} : 1 \le j \le k\}$ แยกพิจารณา 2 กรณีย่อย ดังนี้

กรณีย่อย 2.1: $w \in \{u_{j+k}, u_{j+3k}, \dots, u_{j+(c-3)kn} : 1 \le j \le k\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j และ p ซึ่ง $1 \le j \le k$ และ $0 \le p \le m - 2$ ที่ $w = u_{j+(2p+1)k}$ จึงได้ว่าจุดยอด $u_{j+(2p+1)k}$ จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ $u_{j+(2p+1)k-k}, u_{j+(2p+1)k+k}$ และ $v_{j+(2p+1)k}$ จากการกำหนดเซต D จะได้ว่า $u_{j+2qk} \in D$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม q ซึ่ง $0 \le q \le m - 1$ พิจารณาจุดยอด $u_{j+(2p+1)k-k} = u_{j+2pk} \in D$ และพิจารณาจุดยอด $u_{j+(2p+1)k+k} = u_{j+2pk+2k} = u_{j+2(p+1)k}$ เนื่องจาก $0 \le p \le m - 2$ จึงได้ว่า $1 \le p + 1 \le m - 1$ ดังนั้นจุดยอด $u_{j+(2p+1)k+k} \in D$ นั่นคือจุดยอด $u_{j+(2p+1)k}$ ถูก 2-โดมิเนตโดย D

กรณีย่อย 2.2: $w \in \{u_{j+(c-1)k} : 1 \le j \le k\}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม j ซึ่ง $0 \le j \le k$ ที่ $w = u_{j+(c-1)k}$ จะได้ว่าจุดยอด $u_{j+(c-1)k}$ จะประชิดกับจุดยอดสามจุด ได้แก่ $u_{j+(c-1)k-k}, u_{j+(c-1)k+k}$ และ $v_{j+(c-1)k}$ ต่อไปจะพิจารณาจุดยอด $u_{j+(c-1)k+k} = u_{j+ck}$ เนื่องจาก $j + ck \equiv j(mod\ ck)$ ดังนั้นจุดยอด $u_{j+ck} = u_j \in D$ และพิจารณาจุดยอด $u_{j+(c-1)k-k}$ ได้ว่าจุดยอด $u_{j+(c-1)k-k} = u_{j+(c-2)k} \in D$ ดังนั้นจุดยอด $u_{j+(c-1)k}$ ถูก 2-โดมิเนตโดย D

จากทั้ง 2 กรณีจะเห็นได้ว่าจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D จึงสรุปได้ว่า D เป็นเซต 2-โดมิเนติงของกราฟ $P(ck, k)$ เมื่อ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และได้ว่า

$$|D| = \frac{ck}{2} + \frac{ck}{2} = ck$$

ดังนั้น $\gamma_2\big(P(ck, k)\big) \le |D| = ck$ #

บทตั้ง 5 ให้ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $c \ge 3$ จะได้ว่า $\gamma_2(P(ck, k)) \ge \left\lceil \frac{4ck}{5} \right\rceil$

พิสูจน์ ให้ D เป็นเซต 2-โดมิเนติงใด ๆ ของกราฟ $P(ck, k)$ โดยที่ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $c \ge 3$ ดังนั้น $|V - D| = 2ck - |D|$ ให้ $E(D, V - D)$ แทนเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดของ $P(ck, k)$ ที่มีจุดปลายจุดหนึ่งอยู่ใน D และจุดปลายอีกจุดอยู่ใน $V - D$ เนื่องจากจุดยอดแต่ละจุดใน $V - D$ ประชิดกับจุดยอดอย่างน้อยสองจุดใน D นั่นคือจุดยอดแต่ละจุดใน $V -$

D จะทำให้เกิดเส้นเชื่อมอย่างน้อย 2 เส้นใน $E(D, V-D)$ และจุดยอดแต่ละจุดใน D จะทำให้เกิดเส้นเชื่อมไม่เกิน 3 เส้นใน $E(D, V-D)$ จะได้ว่า $2|V-D| \leq |E(D, V-D)| \leq 3|D|$ นั่นคือ

$$2(2ck - |D|) \leq |E(D, V-D)| \leq 3|D|$$

ดังนั้น $4ck - 2|D| \leq 3|D|$ ได้ว่า $|D| \geq \frac{4ck}{5}$ เนื่องจากจำนวนสมาชิกของ D ต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $|D| \geq \left\lceil \frac{4ck}{5} \right\rceil$ #

โดยบทตั้ง 3.1 - 3.5 จะทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก c และ k ที่ $c \geq 3$ จะได้ว่า $\left\lceil \frac{4ck}{5} \right\rceil \leq \gamma_2(P(ck, k)) \leq ck$

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากการศึกษาจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟพีเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck, k)$ ผู้ศึกษาพบว่า

-- ถ้า c และ k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\gamma_2(P(ck, k)) \leq ck$

-- ถ้า c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ซึ่ง $c \geq 3$ จะได้ว่า $\gamma_2(P(ck, k)) \geq \left\lceil \frac{4ck}{5} \right\rceil$

ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก c และ k ใด ๆ ที่ $c \geq 3$

$$\left\lceil \frac{4ck}{5} \right\rceil \leq \gamma_2(P(ck, k)) \leq ck \qquad (*)$$

เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ข้างต้นกับบทความวิจัยของ Cheng และคณะ (Cheng *et al.*, 2013) ซึ่งได้พิสูจน์ว่า $\gamma_2(P(n,1)) = n$ และ $\gamma_2(P(6,2)) = 6$ จะพบว่าจำนวน 2-โดมิเนชันมีค่าเท่ากับขอบเขตบนของ $(*)$ ในกรณีที่ $k = 1$ และ $c = 3, k = 2$ ตามลำดับ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ c และ k มีค่ามากขึ้นจะพบว่าค่าจริงของจำนวน 2-โดมิเนชันแตกต่างจากขอบเขตบนและขอบเขตล่างของ $(*)$ เช่น เมื่อพิจารณา $c = 8, k = 2$ โดย $(*)$ จะได้ว่า $13 \leq \gamma_2(P(16,2)) \leq 16$ แต่จากบทความวิจัยของ Bakhshesh และคณะ (Bakhshesh *et al.*, 2018) พิสูจน์ว่าค่าจริงสำหรับ $\gamma_2(P(5k+1,2)) = 4k + 2$ นั่นคือ $\gamma_2(P(5(3)+1,2)) = 4(3) + 2 = 14$

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ให้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างสำหรับจำนวน 2-โดมิเนชันของกราฟเตอร์เซนวางนัยทั่วไป $P(ck, k)$ เมื่อ c และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $c \geq 3$ ซึ่งได้ผลลัพธ์คือ $\left\lceil \frac{4ck}{5} \right\rceil \leq \gamma_2(P(ck, k)) \leq ck$

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้เป็นผลงานวิจัยที่ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัย ประเภทนักวิจัยรุ่นใหม่ จากกองทุนวิจัยคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ตามเลขที่สัญญา 1/2565

เอกสารอ้างอิง

Arash, B., Mehdi, B. & Elisabeth P.C. (2008). On the domination number of ge neralized Petersen Graphs. *Discrete Math.,* 308, 603-610.

Bakhshesh, D., Farshi, M. & Hooshmandasl, M.R. (2018). 2-domination number of generalized Petersen graphs. *Proc. Indian Acad. Sci.* (*Math. Sci.*)*, 128*, Article ID : 0017

Chen, X. & Zhao, X. (2020). The exact 2-domination number of generalized Petersen graphs. *Proc. Indian Acad.Sci.* (*Math.Sci*), 130, 1-6.

Cheng, Y. (2013). α-domination of generalized Petersen graphs, Ph.D. thesis (National Chiao Tung University).

Coxeter, H.S.M. (1950), Self-dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc*., *56(*5*)*, 413–455.

Ebrahimi, B.J., Jahanbakht, N. & Mahmoodian, E.S. (2009). Vertex domination of generalized Petersen graphs. *Discrete Math., 309*, 4355-4361.

Fu, X., Yang, Y. & Jiang, B. (2009). On the domination number of generalized Petersen graphs $P(n,2)$. *Discrete Math., 309*, 2445-2451.

Petersen, J. (1898). Sur le théorème de Tait. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, *5*, 225-227.

Yang, H., Kang, L., & Xu, G. (2009). The exact domination number of generalized Petersen graphs. *Discrete Math*., *309,* 2596-2607.

Zhao, W., Zheng, M., & Wu, L. (2010). Domination Number of Generalized Petersen graphs $P(ck,k)$. *Util. Math., 81*, 157-163.