จุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

FIXED POINTS FOR CYCLICAL MULTI-VALUES MAPPING ON GENERALIZED DISTANCE τ^0 IN COMPLETE METRIC SPACE

อนุเทพ เทพปัน[1], สมยศ พลับเที่ยง[2], และ สมคิด อินเทพ[1]*

Anutep Tepphun[1], Somyot plubtieng[2] and Somkid Intep[1]*

[1] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

[2] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อขยายทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่วางนัยทั่วไปกว่าของ Neamanee and Kaewkhao (2011)

คำสำคัญ : ฟังก์ชัน τ^0 /ฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p / ฟังก์ชัน MT /การส่งหลายค่าแบบวน

Abstract

In this research, the Neamanee and Kaewkhao (2011) results that fixed point theorems for cyclical mapping in complete metric space are extended using generalized distance τ^0.

Keywords : τ^0 - function/ D_p - metric/ MT function/Cyclical Mapping

*Corresponding author, Email: intep@buu.ac.th

1. บทนำ

ในการศึกษาทฤษฎีของจุดตรึง (fixed point theorem) ทฤษฎีที่สำคัญซึ่งเป็นการเริ่มต้นของการศึกษา ก็คือ หลักการการหดตัวของบานาค (The Banach Contraction Principle) (Kreyzig (1978)) ซึ่งกล่าวไว้ คือ ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space) และ $T:X\to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว a (a-contraction mapping) นั่นคือ มีค่าคงที่ $a\in(0,1)$ ซึ่ง $d(Tx,Ty)\le ad(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$ จะได้ว่า T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น

สำหรับการขยายผลของทฤษฎีบทนี้นั้นปรากฏอยู่ในผลงานวิจัยต่างๆ เช่น Kirk, Srinivasan, and Veeramani (2003) และอ้างอิงอื่นๆ ในนั้นด้วย

ในปี 1969 Nadler (1969) ได้ศึกษาจุดตรึงภายใต้การส่งหลายค่าแบบหดตัว (contraction multi-valued mapping) โดยให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและให้ $P(X)$ แทนวงศ์ (family) เซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X เรียกการส่ง $T:X\to P(X)$ ว่าเป็นการส่งหลายค่า และถ้ามีค่าคงที่ $k\in(0,1)$ ซึ่ง

$H(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x,y\in X$

เราจะเรียก T ว่าการส่งหลายค่าแบบหดตัว โดยที่ $H(A,B)=\max\{h(A,B),h(B,A)\}$ และ $h(A,B)=\sup\{d(a,B):a\in A\}$

จะเรียก $x\in X$ ว่าเป็นจุดตรึงของการส่งหลายค่า T ก็ต่อเมื่อ $x\in Tx$ ซึ่งจะเขียนแทนเซตของจุดตรึงของ T ด้วย F_T นั่นคือ $F_T=\{x\in X : x\in Tx\}$ ดังนั้น ถ้า ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $T:X\to CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบหดตัว เมื่อ $CB(X)$ แทน วงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างและมีขอบเขตของ X แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด

ในปี 2003 หนึ่งในทฤษฎีที่น่าสนใจที่ Kirk, Srinivasan, and Veeramani (2003) ได้พิสูจน์ไว้ คือ ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (complete metric space) (X,d) สมมติให้ $T:A\cup B\to A\cup B$ เป็นการส่งแบบวน (cyclic mapping) นั่นคือ $T(A)\subseteq B$ และ $T(B)\subseteq A$ และมี $k\in(0,1)$ ซึ่ง $d(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$ แล้ว จะได้ว่า $A\cap B\ne\phi$ และ T มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวใน $A\cap B$

ในปี 2011 Neamanee and Kaewkhao (2011) ได้พัฒนาและขยายผลทฤษฎีของจุดตรึงภายใต้การส่งหลายค่าแบบวน ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทาง (X,d) สมมติให้ $T:A\cup B\to A\cup B$ เป็นการส่งแบบวนบน A และ B โดยที่ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A\cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $k\in(0,1)$ ซึ่ง $H(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^n$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และ 2^X เป็นวงศ์ของเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของ X สมมติให้ $T:\bigcup_{i=1}^n A_i\to 2^X$ โดยที่ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $\bigcup_{i=1}^n A_i$ $A_{n+1}=A_1$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i\subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i\in A_i$ และ $1\le i\le n$;

(b) $\exists k\in(0,1)$ ซึ่ง $H(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ สำหรับทุก $x\in A_i$ และ $y\in A_{i+1}$ เมื่อ $1\le i\le n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^n A_i$

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A\cup B$ ถ้ามีค่าคงที่ $\theta\in(0,1)$ และ $L\ge 0$ ซึ่ง

$H(Tx,Ty)\le\theta d(x,y)+L\cdot\min\{d(y,Tx),d(x,Ty)\}$

สำหรับทุก $x\in A$ และ $y\in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$ และ F_T เป็นเซตปิด

2. ความรู้พื้นฐาน

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ เราจะเป็นต้องศึกษาความรู้พื้นฐาน บทนิยามและบทตั้ง ที่ใช้ประกอบการศึกษาในงานวิจัยนี้ ซึ่งได้ส่วนใหญ่ได้มาจากการศึกษางานวิจัยของ Du (2010) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ $p:X\times X\to[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก p ว่าเป็นฟังก์ชัน τ ก็ต่อเมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไข

($\tau 1$) $p(x,z)\le p(x,y)+p(y,z)$ สำหรับ $x,y,z\in X$

($\tau 2$) ถ้า $x \in X$ และ $\{y_n\}$ ใน X เมื่อ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ซึ่ง $p(x, y_n) \le M$ สำหรับบางค่าคงที่ $M > 0$ ที่ขึ้นอยู่กับ x แล้ว $p(x, y) \le M$

($\tau 3$) สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \sup\{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$ ถ้ามีลำดับ $\{y_n\}$ ใน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$

($\tau 4$) สำหรับ $x, y, z \in X$, $p(x, y) = 0$ และ $p(x, z) = 0$ แล้ว $y = z$

บทนิยาม 2.2 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก p ว่าเป็นฟังก์ชัน τ^0 ก็ต่อเมื่อ p ว่าเป็นฟังก์ชัน τ และ $p(x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

บทตั้ง 2.3 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า p สอดคล้องกับ ($\tau 3$) และลำดับ $\{x_n\}$ บน X ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} \sup\{p(x_n, x_m) : m > n\} = 0$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชีบน X

บทตั้ง 2.4 ให้ A เป็นเซตปิดที่ไม่ว่างบนปริภูมอิงระยะทาง (X, d) และ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน กำหนดให้ p มีสมบัติสอดคล้อง ($\tau 3$) และมี $u \in X$ ซึ่ง $p(u, u) = 0$ ดังนั้น จะได้ว่า $p(u, A) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $u \in A$ เมื่อ $p(u, A) = \inf\{p(u, a) \mid a \in A\}$

บทตั้ง 2.5 ให้ $x \in X$ และ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X ถ้า A เป็นเซตปิด แล้ว จะมี $a \in A$ ซึ่ง $p(x, a) = p(x, A)$

บทนิยาม 2.6 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ p เป็นฟังก์ชัน τ^0 สำหรับ $A, B \in CB(X)$ กำหนดฟังก์ชัน $D_p : CB(X) \times CB(X) \to [0, \infty)$ โดย

$$D_p(A, B) = \max\{\delta_p(A, B), \delta_p(B, A)\}$$

เมื่อ $\delta_p(A, B) = \sup\{p(a, B) : a \in A\}$ และ $p(x, A) = \inf\{p(x, a) : a \in A\}$

จะเรียก D_p ว่าเป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p

บทตั้ง 2.7 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ D_p เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 บน $CB(X)$ ที่กำหนดโดย p แล้ว สำหรับ $A, B, C \in CB(X)$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไข

(1) ถ้า $\delta_p(A, B) = 0$ แล้ว $A = B$

(2) $\delta_p(A, C) \le \delta_p(A, B) + \delta_p(C, B)$

(3) สำหรับทุกฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p ที่กำหนดโดย p ที่เป็นฟังก์ชัน τ^0 เป็นฟังก์ชันอิงระยะทางบน $CB(X)$

บทนิยาม 2.8 (Mizoguchi andTakahashi (1989)) ให้ $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก φ ว่าเป็นฟังก์ชัน MT ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Mizoguchi-Takahashi นั่นคือ $\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) < 1$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$

ข้อสังเกต 2.9 (1) ถ้าฟังก์ชัน $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ ซึ่ง $\varphi(t) = k$ เมื่อ $k \in [0, 1)$ แล้ว φ เป็นฟังก์ชัน MT

(2) ถ้า $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด (Non-decreasing function) แล้ว φ เป็นฟังก์ชัน MT

(3) ถ้า $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน MT ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$ จะมี $r_t \in [0, 1)$ และ $\varepsilon_t \in [0, 1)$ ซึ่ง $\varphi(s) \le r_t$ สำหรับทุก $s \in [t, t + \varepsilon_t)$

(4) ถ้า $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ เป็นฟังก์ชัน MT แล้ว $k : [0, \infty) \to [0, 1)$ ซึ่ง $k(t) = \dfrac{\varphi(t) + 1}{2}$ เป็นฟังก์ชัน MT

ดังนั้น จากแนวคิดที่ได้ศึกษาความรู้พื้นฐาน บทนิยามและบทตั้ง ที่ได้มาจากงานวิจัยของ Du, W. (2010) จึงนำไปสู่การสร้างทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ ซึ่งวางนัยทั่วไปกว่าของ Neamanee and Kaewkhao (2011)

3. ทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์

ทฤษฎีบทที่สำคัญในงานวิจัยนี้มีทั้งหมด 3 ทฤษฎีด้วยกันซึ่งเป็นขยายแนวคิดทฤษฎีจุดตรึงของการส่งหลายค่าแบบวนซึ่งวางนัยทั่วไปกว่าของ Neamanee and Kaewkhao (2011) ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X,d) และให้ $p: X\times X \to [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต สำหรับทุก $x\in A\cup B$ และให้ $\varphi:[0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่ง

$$D_p(Tx,Ty)\le \varphi(p(x,y))p(x,y) \text{ สำหรับทุก } x\in A \text{ และ } y\in B$$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$

พิสูจน์ จากข้อสังเกต 2.9 (4) เราสามารถนิยามฟังก์ชัน $k:[0,\infty)\to[0,1)$ ที่เป็นฟังก์ชัน MT โดย $k(t)=\dfrac{\varphi(t)+1}{2}$
ดังนั้น จะได้ว่า $\varphi(t)<k(t)$ และ $0<k(t)<1$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ กำหนดให้ $x_0\in A$ และ $x_1\in Tx_0\subseteq B$
ถ้า $D_p(Tx_0,Tx_1)=0$ จะได้ว่า $Tx_0=Tx_1$ นั่นคือ $x_1\in Tx_1$ นั่นหมายความว่า $F_T\neq\phi$
แต่ถ้า $D_p(Tx_0,Tx_1)>0$ จะได้ว่า จะมี $x_2\in Tx_1\subseteq A$ ซึ่ง

$$p(x_1,x_2)\le D_p(Tx_0,Tx_1)\le\varphi(p(x_0,x_1))p(x_0,x_1)<k(p(x_0,x_1))p(x_0,x_1)$$

นั่นคือ $p(x_1,x_2)<k(p(x_0,x_1))p(x_0,x_1)$ แต่ถ้า $D_p(Tx_1,Tx_2)=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Tx_1=Tx_2$ นั่นคือ $x_2\in Tx_2$ แสดงว่าว่า $F_T\neq\phi$ แต่ถ้า $D_p(Tx_1,Tx_2)>0$ จะได้ว่า จะมี $x_3\in Tx_2\subseteq B$ ซึ่ง

$$p(x_2,x_3)\le D_p(Tx_1,Tx_2)\le\varphi(p(x_1,x_2))p(x_1,x_2)<k(p(x_1,x_2))p(x_1,x_2)$$

นั่นคือ $p(x_2,x_3)<k(p(x_1,x_2))p(x_1,x_2)$ ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ลำดับ $\{x_n\}$ โดยที่ $x_{n+1}\in Tx_n$ ซึ่งจะพบว่า $x_{2n}\in A$, $x_{2n+1}\in B$, $p(x_n,x_{n+1})>0$ และ $p(x_{n+1},x_{n+2})<k(p(x_n,x_{n+1}))p(x_n,x_{n+1})$ สำหรับ $n\in\mathbb{N}$ เนื่องจาก $k(t)<1$ สำหรับทุก $t\in[0,\infty)$ ดังนั้น $\{p(x_n,x_{n+1})\}$ เป็นลำดับลดอย่างเข้มในช่วง $[0,\infty)$ กำหนดให้
$\delta:=\lim\limits_{n\to\infty}p(x_n,x_{n+1})=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}p(x_n,x_{n+1})\ge 0$
เนื่องจาก k เป็นฟังก์ชัน MT ดังนั้น จะมี $c\in(0,1)$ และ $\varepsilon>0$ ซึ่ง $k(s)\le c$ สำหรับทุก $s\in[\delta,\delta+\varepsilon)$
และเนื่องจาก $\delta:=\lim\limits_{n\to\infty}p(x_n,x_{n+1})=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}p(x_n,x_{n+1})\ge 0$ นั่นคือ สำหรับทุก $\varepsilon>0$ จะมี $\ell\in\mathbb{N}$ ที่เป็นจำนวนคี่ ซึ่ง $\delta\le p(x_n,x_{n+1})<\delta+\varepsilon$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ เมื่อ $n\ge\ell$ และกำหนดให้ $v_n=x_{n+\ell-1}$
ดังนั้น เราจะพบว่า

$$p(v_{n+1},v_{n+2})\le k\left(p(v_n,v_{n+1})\right)p(v_n,v_{n+1})\le cp(v_n,v_{n+1})$$

เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า $p(v_{n+1},v_{n+2})\le cp(v_n,v_{n+1})\le\ldots\le c^n p(v_1,v_2)$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$
ดังนั้น สำหรับ $n,m\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $m>n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p(v_n,v_m) &\le p(v_n,v_{n+1})+p(v_{n+1},v_{n+2})+\cdots+p(v_{m-1},v_m)\\ &< c^{n-1}p(v_1,v_2)+c^n p(v_1,v_2)+\cdots+c^{m-1}p(v_1,v_2)\\ &< \frac{c^{n-1}}{1-c}p(v_1,v_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

เนื่องจาก $0<c<1$ เมื่อ $n\to\infty$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{p(v_n,v_m):m>n\}=0$ เพราะฉะนั้นลำดับ $\{v_n\}$ เป็นลำดับโคชี
เนื่องจาก (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ ดังนั้น จะมี $v\in X$ ซึ่ง $v_n\to v$ เมื่อ $n\to\infty$ เนื่องจาก $\{x_{2n}\}\subseteq A$ และ $\{x_{2n-1}\}\subseteq B$ ดังนั้น $\{v_{2n}\}\subseteq A$ และ $\{v_{2n-1}\}\subseteq B$ เนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิด และ $v_{2n}\to v$ และ $v_{2n-1}\to v$ เมื่อ $n\to\infty$ ทำให้ได้ว่า $v\in A$ และ $v\in B$ ตามลำดับ แสดงว่า $v\in A\cap B$ และจากเงื่อนไข (τ2) และ (2.4)
จะได้ว่า สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

$$p(v_n,v) < \frac{c^{n-1}}{1-c}p(v_1,v_2)$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}p(v_n,v)=0$ แต่เนื่องจาก

$$\begin{aligned} p(v,Tv) &\le p(v,v_{n+1})+p(v_{n+1},Tv)\\ &\le p(v,v_{n+1})+D_p(Tv_n,Tv) \end{aligned}$$

$$\leq p(v, v_{n+1}) + \varphi(p(v_n, v))p(v_n, v)$$

ดังนั้น สำหรับ $n \to \infty$ จะได้ว่า $p(v, Tv) = 0$ และ เนื่องจาก Tv เป็นเซตปิด แสดงว่า $v \in Tv$

ข้อสังเกต 3.2 เราจะพบว่าทฤษฎีบท 3.1 ได้ขยายทฤษฎีบท 1.1

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $X = \mathbb{R}$, $A = \{0,1\}$ และ $B = \{1,2\}$ เมื่อ $d(x, y) = |x - y|$ สำหรับ $x, y \in X$ แล้ว (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์และให้การส่ง $T : A \cup B \to P(X)$ กำหนดโดย

$$Tx = \begin{cases} \{1,2\} & ; x = 0, \\ \{1\} & ; x \in \{1,2\} \end{cases}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B ซึ่ง Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขตสำหรับทุก $x \in A \cup B = \{0,1,2\}$ และ $F_T = \{1\} \subseteq A \cap B$

ซึ่งเราจะพบว่า $H(T0, T1) = 1$ และ $d(0,1) = 1$ ดังนั้น จึงไม่มีค่าคงที่ $k \in (0,1)$ ที่ทำให้ $H(T0, T1) \leq kd(0,1)$ ทำให้ทฤษฎีบท 1.1 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทในงานวิจัยของ Neamanee and Kaewkhao (2011) ไม่สามารถบอกได้ว่า T จะมีจุดตรึงใน $A \cap B$

แต่พบว่า สำหรับ $p : X \times X \to [0, \infty)$ กำหนดโดย

$$p(x, y) = \max\{2(x - y), 3(y - x)\} \text{ สำหรับ } x, y \in X$$

และ $\varphi : [0, \infty) \to [0,1)$ กำหนดโดย $\varphi(t) = \dfrac{9}{10}$ สำหรับทุก $t \in [0, \infty)$

จะได้ว่า $D_p(T0, T1) = 2 \leq \dfrac{9}{10}(3) = \varphi(p(0,1))p(0,1)$, $D_p(T0, T2) = 2 \leq \dfrac{9}{10}(6) = \varphi(p(0,2))p(0,2)$,

และ $D_p(T1, T2) = 0 \leq \dfrac{9}{10}(3) = \varphi(p(1,2))p(1,2)$ ทำให้ได้ว่า $D_p(Tx, Ty) \leq \varphi(p(x, y))p(x, y)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ และเนื่องจาก p เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X และ φ เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่งสอดคล้องกับ ทฤษฎีบท 3.1 ทำให้ได้ว่า $F_T \neq \phi$ และ $F_T \subseteq A \cap B$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X, d) และให้ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน X กำหนดให้ $T : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \to 2^X$ เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขตสำหรับทุก $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และเมื่อ $A_{n+1} = A_1$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) $Ta_i \subseteq A_{i+1}$ สำหรับ $a_i \in A_i$ และ $1 \leq i \leq n$

(b) มี $\varphi : [0, \infty) \to [0,1)$ ที่เป็นฟังก์ชัน MT ซึ่ง $D_p(Tx, Ty) \leq \varphi(p(x, y))p(x, y)$ สำหรับทุก $x \in A_i$ และ $y \in A_{i+1}$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

พิสูจน์ การพิสูจน์สามารถพิสูจน์ได้ในลักษณะเดียวกับทฤษฎีบท 3.1

ข้อสังเกต 3.5 เราจะพบว่าทฤษฎีบท 3.4 ได้ขยายทฤษฎีบท 1.2

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่ว่างของปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ (X, d) และ $p : X \times X \to [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชัน τ^0 บน $CB(X)$ กำหนดให้ T เป็นการส่งหลายค่าแบบวนบน A และ B และ Tx เป็นเซตปิดที่มีขอบเขตสำหรับทุก $x \in A \cup B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $\varphi : [0, \infty) \to [0,1)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน MT และค่าคงที่ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$D_p(Tx, Ty) \leq \varphi(p(x, y))p(x, y) + L \cdot \min\{p(x, Ty), p(y, Tx)\}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ และ F_T เป็นเซตปิด

พิสูจน์ เราสามารถใช้วิธีการเดียวกันกับทฤษฎี 3.1 ในการสร้างลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_{n+1} \in Tx_n$ เพราะฉะนั้น ถ้า $x_n \in A$ เราจะได้ว่า $x_{n+1} \in Tx_n \subseteq B$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$D_p(Tx_n,Tx_{n+1}) \le \varphi(p(x_n,x_{n+1}))p(x_n,x_{n+1}) + L\cdot\min\{p(x_{n+1},Tx_n),\, p(x_n,Tx_{n+1})\}$$
$$\le \varphi(p(x_n,x_{n+1}))p(x_n,x_{n+1}) + L\cdot p(x_{n+1},Tx_n)$$
$$= \varphi(p(x_n,x_{n+1}))p(x_n,x_{n+1})$$

ดังนั้น แสดงว่า $F_T \neq \phi$ และ $F_T \subseteq A\cap B$ ต่อไปเราจะแสดงว่า F_T เป็นเซตปิด กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับใน F_T ซึ่ง $x_n \to u$ เนื่องจาก $F_T \subseteq A\cap B$ และ $A\cap B$ เป็นเซตปิด จะได้ว่า $u \in A\cap B$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} p(u,Tu) &\le p(u,x_n) + p(x_n,Tx_{n-1}) + D_p(Tx_{n-1},Tu) \\ &\le p(u,x_n) + D_p(Tx_{n-1},Tu) \\ &\le p(u,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},u))p(x_{n-1},u) + Lp(u,Tx_{n-1}) \\ &\le p(u,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},u))p(x_{n-1},u) + L\big(p(u,x_n) + p(x_n,Tx_{n-1})\big) \\ &\le p(u,x_n) + \varphi(p(x_{n-1},u))p(x_{n-1},u) + Lp(u,x_n) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $n \to \infty$ จะได้ว่า $p(u,Tu)=0$ เนื่องจาก Tu เป็นเซตปิด ดังนั้น $u \in Tu$ ทำให้ได้ว่า F_T เป็นเซตปิด แสดงว่า F_T เป็นเซตปิด

ข้อสังเกต 3.7 เราจะพบว่าทฤษฎีบท 3.6 ได้ขยายทฤษฎีบท 1.3

4. บทสรุป

จากบทความนี้จะพบวิธีการในนำเอาความรู้ที่ได้จากการศึกษางานวิจัยต่างๆ โดยเฉพาะงานวิจัยของ Du (2010) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังชัน τ^0 ฟังก์ชันอิงระยะทาง D_p และฟังก์ชัน MT มาใช้ในการสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบวนบนรูปทั่วไปของฟังก์ชันอิงระยะทาง τ^0 ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่วางนัยทั่วไปกว่าของ Neamanee and Kaewkhao (2011)

เอกสารอ้างอิง

Du, W. (2010). Some new results and generalizations in metric fixed point theory. *Nonlinear Analysis*, *73*, 1439-1446.

Kirk, W.A., Srinivasan, P.S., & Veeramani, P. (2003). Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions. *Fixed Point Theory*, *4*, 79-89.

Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. Canada: Jonh Wiley & Sons.

Lin, L.J., & Du, W. (2006). Ekeland's variational principle, minimax theorems and existence of nonconvex equilibria in complete metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323, 360–370.

Mizoguchi, N, Takahashi, W. (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. *J. Math. Anal. Appl*. 141, 177-188.

Nadler, S.B. (1969). Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal Mathematical*, *30*, 475-488.

Neammanee, K., & Kaewkhao, A. (2011). Fixed points and Best Proximity Points For Multi-Valued Mapping Satisfying Cyclical Condition. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, *1*(1), 1-9.

Takahashi, W. (2000). *Nonlinear Functional Analysis Fixed Point Theory and its Applications*. Japan: Yokohama.