



การวิเคราะห์ทางรีโอโลยีในการไหลยืดดึง

Rheological Analysis of Elongational Flows

ชาญยุทธ โกลิตะวงษ์

Chanyut Kolutawong

ศูนย์วิจัยพอลิเมอร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

Polymer Research Center, Department of Mechanical and Aerospace Engineering,

Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok

Received : 2 March 2019

Revised : 6 November 2019

Accepted : 4 May 2020

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงการวิเคราะห์การเสียรูปของก้อนของไหล (Fluid element) ที่อยู่ระหว่างการทดสอบการยืดดึงทิศทางเดียว การทดสอบยืดดึงสองทิศทาง และการทดสอบการยืดดึงในระนาบ และแสดงให้เห็นว่าการยืดดึงทิศทางเดียวและสองทิศทางมีจลนศาสตร์การไหล (Flow kinematics) ที่มีการเปลี่ยนรูปเชิงเส้นที่มีการหมุน (Rotational flow) ในขณะที่การไหลยืดดึงในระนาบเป็นการไหลที่ไม่มี การหมุน (Irrotational flow) นอกจากนี้ยังอธิบายที่มาของฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงด้วยการ สมดุลแรงจากก้อนของไหล (Fluid element) ในแผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของกลุ่มของไหลที่อยู่ระหว่างการทดสอบการยืดดึง ทำให้เข้าใจความสัมพันธ์ของแรงดึงกับค่าความหนืดยืดดึง (Elongational viscosity) $\eta_E(t, \dot{\epsilon})$ และค่ามอดูลัสยืดหยุ่นของยังส์ (Young's elastic modulus) $E(t, \epsilon)$ ในการไหลยืดดึงทิศทางเดียว และในทำนองเดียวกัน ยังอธิบายที่มาของฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงสองทิศทาง $\eta_B(t, \dot{\epsilon}_B)$ และ $E_B(t, \epsilon_B)$ และฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงในระนาบ $\eta_{P1}(t, \dot{\epsilon}), \eta_{P2}(t, \dot{\epsilon})$ และ $E_{P1}(t, \epsilon), E_{P2}(t, \epsilon)$ อีกทั้งยังได้แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงเหล่านี้ กับความหนืดในการไหลแบบเฉือนด้วย ตัวแปรเหล่านี้ทางสมาคมรีโอโลยีแห่งสหรัฐอเมริกา (Society of Rheology, USA) ได้ประกาศให้นักวิจัยที่ทำงานด้านรีโอโลยีใช้ให้เหมือนกันเพื่อความเข้าใจที่ตรงกัน

คำสำคัญ : รีโอโลยีของการไหลยืดดึง ; ค่าความหนืดยืดดึง ; การไหลทิศทางเดียว ; การไหลสองทิศทาง ; การไหลในระนาบ



Abstract

The objective of this paper is to analyze the fluid element under the elongational deformation and to explain the origin of the rheology functions of shear free flows. The analysis's shown that flow kinematics of the uniaxial and biaxial elongations are rotational, while those of the planar elongation are irrotational. From force balances of the free body diagram of a fluid element in an uniaxial elongational flow experiment, the stretching force is related to the elongational viscosity $\eta_E(t, \dot{\epsilon})$ and the Young's elastic modulus $E(t, \epsilon)$. Moreover, the force balances of the fluid element give the biaxial elongational viscosity $\eta_B(t, \dot{\epsilon}_B)$ and the Young's elastic modulus $E_B(t, \epsilon)$ in biaxial flow. Last, the rheology functions of planar elongational flow are examined. The first and second planar elongational viscosities, $\eta_{P1}(t, \dot{\epsilon})$ and $\eta_{P2}(t, \dot{\epsilon})$, and the first and second planar elongational moduli, $E_{P1}(t, \epsilon)$ and $E_{P2}(t, \epsilon)$, are explored. Moreover, the relationships between shear viscosity and extensional parameters are determined. These elongational rheology functions are standardized by the American the Society of Rheology to be commonly used worldwide.

Keywords : rheology of elongational flow ; elongational viscosity ; uniaxial flow ; biaxial flow ; planar flow



บทนำ

รีโวลยี (Rheology) เป็นศาสตร์ที่เกิดขึ้นในช่วงราวกลางคริสต์ศตวรรษที่ 20 (Tanner, 2002) เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแรง และการเปลี่ยนรูปของวัตถุในช่วงเวลาที่สนใจ โดยที่แรงนั้นจะทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวร และเกิดเป็นการไหลของสสารในที่สุด (Kolitawong, 2003; Kolitawong & Giacomini, 2009) การไหลแบ่งออกเป็น 2 ประเภทหลัก ๆ คือ การไหลแบบเฉือน (Shear flow) และการไหลที่ไม่มีการเฉือน (Shear free flow) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าการไหลยืดดึง (Elongational flow) การไหลแบบเฉือนเป็นการไหลของของไหลในช่องแคบหรือไหลในท่อ ซึ่งกระบวนการผลิตพลาสติกแทบทั้งหมด เช่น การอัดรีด (Extrusion) การฉีดเข้าแม่พิมพ์ (Injection molding) และการกดอัดเข้าแม่พิมพ์ (Compression molding) จะเกี่ยวกับการไหลแบบเฉือนนี้ ในขณะที่ของไหลในช่องแคบหรือไหลในท่อนั้นบางครั้งของไหลอาจจะถูกยืดดึง (Elongation) ไปพร้อม ๆ กัน เช่น การไหลผ่านช่องแคบหรือท่อลดขนาดเป็นต้น ส่วนการไหลแบบที่ไม่มีการเฉือนจะเกิดจากการยืดดึงเป็นหลัก เช่น การยืดดึงในกระบวนการหลอมปั่นเส้นใย (Fiber melt spinning) กระบวนการเป่าถุง (Film blowing) และการเป่าเข้าแม่พิมพ์ (Blow molding) เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามโดยปกติแล้วพฤติกรรมของการไหลในกระบวนการขึ้นรูปพอลิเมอร์จะเกิดทั้งการไหลแบบเฉือน และการไหลยืดดึงไปพร้อม ๆ กัน สำหรับการวิเคราะห์สมบัตินรีโวลยีในการไหลแบบเฉือน และตัวแปรในการทดสอบการไหลแบบเฉือนอย่างละเอียดหาอ่านได้จาก (Kolitawong, 2018, Kolitawong, 2020) ในบทความนี้จะแนะนำฟังก์ชันทางรีโวลยีของการไหลแบบเฉือนแคพอสังเขป เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงที่มาของสมบัตินรีโวลยี และพฤติกรรมของการไหลยืดดึงเป็นหลัก ในการทดสอบยืดดึงยังมีรายละเอียดในการทดสอบแยกย่อยออกไปอีก ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ในการทดสอบ เช่น การศึกษาอัตราครีดยืดดึงคงตัว (Steady elongational flow) ซึ่งเป็นการไหลที่ไม่ขึ้นกับเวลา นั่นคือมีอัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ ส่วนการทดสอบยืดดึงที่ขึ้นกับเวลา (Unsteady flow) จะมีการทดสอบหลายรูปแบบ เช่น การยืดหดเป็นรอบ (Oscillatory elongation) การเกิดความเค้นยืดดึง (Elongational stress growth) และการคลายความเค้นยืดดึง (Elongational stress relaxation) เป็นต้น ในการทดสอบยืดดึงไม่คงตัวเหล่านี้ จะกระทำที่อัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ แต่จะสังเกตพฤติกรรมของวัสดุที่เป็นฟังก์ชันของเวลาหลังจากที่หยุดหรือได้รับอัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ นั้น ๆ (Kolitawong, 2019a) ถึงแม้ว่านักวิจัยมีการทำการทดสอบเพื่อศึกษาพฤติกรรมของวัสดุพอลิเมอร์อย่างต่อเนื่อง แต่ก็ยังมีการนำเสนอรูปแบบการทดสอบอื่น ๆ ที่ไม่ใช่การทดสอบหลัก ๆ ที่ได้กล่าวไปแล้ว เช่น การทดสอบสมบัตินรีโวลยีบนเครื่องขึ้นรูป (Online rheometry) ซึ่งไม่ได้กล่าวถึงอย่างเจาะจงในบทความนี้ แต่ก็สามารถอ้างอิง และนำไปประยุกต์ใช้ได้เช่นกัน

วัตถุประสงค์หลักในบทความนี้ คือการใช้หลักกลศาสตร์ของไหลอธิบายที่มาของฟังก์ชันรีโวลยีในการไหลแบบยืดดึงในการทดลองหลัก ๆ (Kolitawong, 2019a; Morrison, 2001) ไม่ว่าจะเป็นการยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial elongational flow) การยืดดึงสองทิศทาง (Biaxial elongational flow) และการยืดดึงในระนาบ (Planar elongational flow) ที่สมาคมรีโวลยีแห่งสหรัฐอเมริกา (Society of Rheology, SOR) ได้ให้การรับรองแล้ว และทางสมาคมฯ ได้มีการแต่งตั้งกรรมการ เพื่อกำหนดฟังก์ชันรีโวลยีเพื่อให้นักวิจัยด้านรีโวลยี ได้ใช้ตัวแปรเหล่านั้นในทิศทางเดียวกัน (Dealy, 1984; Dealy, 1995; Ad Hoc Committee, 2013)

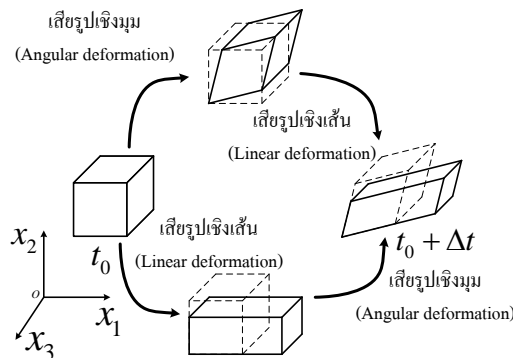
พฤติกรรมการไหล

เมื่อพิจารณาตามหลักกลศาสตร์ของไหล การเคลื่อนที่ของก้อนอนุภาคของไหล ทำให้รูปทรงของกลุ่มของไหลเสียรูปไป (ตามอัตราเร็วในการเสียรูป) ซึ่งทำให้เกิดความเค้นตึงแสดงในภาพที่ 1 จะเห็นได้ว่าพจน์ความเค้นเพิ่มเติม (Extra stress components) จากการเคลื่อนที่ (τ_{ij}) มีความสัมพันธ์กับอัตราครีดยของก้อนของไหล ($\dot{\gamma}_{ij}$) (Pritchard, 2011; White, 2003) ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของดัชนีบ่งชี้ของไอน์สไตน์ (Einstein index notation) ได้คือ

$$\tau_{ij} = f(\dot{\gamma}_{ij}) \tag{1}$$

ซึ่งพจน์ของอัตราครีดย $\dot{\gamma}_{ij}$ ในเทนเซอร์อัตราครีดย $\dot{\gamma}$ ซึ่งประกอบไปด้วยอัตราครีดยทั้งหมด 9 พจน์ทั้งในแนวทแยงมุม และนอกแนวทแยงมุม มีความสัมพันธ์กับอัตราการเสียรูป $\dot{\epsilon}_{ij}$ ดังนี้

$$\dot{\gamma}_{ij} = 2\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{2}$$



ภาพที่ 1 ก้อนอนุภาคของไหลที่มีการเคลื่อนที่ ทำให้ก้อนอนุภาคมีการเสียรูปเชิงเส้น เช่น การยืดดึง และการเสียรูปเชิงมุม เช่น การบิดเบี้ยวไปพร้อม ๆ กัน โดยก้อนอนุภาคที่เวลา t_0 ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ในขณะที่ก้อนอนุภาคเดิมที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เกิดการเสียรูปไปแล้ว

เมื่อ i และ j เป็นตำแหน่งบนเทนเซอร์ความเค้นและอัตราครีดย ที่มีหมายเลขกำกับทิศทางของระบบแกนที่ 1, 2 หรือ 3 โดยที่ระบบแกน x_1, x_2, x_3 บางครั้งเรียกว่า ระบบแกน x, y, z ในระบบแกนพิกัดฉาก ตามลำดับ v_i และ v_j เป็นความเร็วของก้อนของไหล (Fluid element) ในแนวแกน i และ j และ x_i และ x_j เป็นตำแหน่งของก้อนของไหลในแนวแกน i และ j ตามลำดับ เมื่อ $i, j = 1, 2, 3$ สำหรับผู้ที่ไม่คุ้นเคยกับเวกเตอร์และเทนเซอร์ ที่เขียนอยู่ในรูปของดัชนีบ่งชี้ของไอน์สไตน์ (Einstein index notation) สามารถอ่านบทความเพิ่มเติมได้ที่ภาคผนวกของ (Bird, Stewart, Lightfoot & Klingenberg, 2015)

สมการที่ (2) แสดงให้เห็นว่าอัตราเครียด $\dot{\gamma}_{ij}$ กับอัตราการเสียรูป $\dot{\epsilon}_{ij}$ บรรยายฟิสิกส์ในสิ่งเดียวกัน ต่างกันเพียงแค่ค่าคงที่ 2 เท่านั้น และยังแสดงให้เห็นว่าอัตราเครียดของวัสดุ เกิดจากอัตราการเสียรูปของวัสดุเชิงเส้น (Linear deformation) ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแนวทแยง (Diagonal positions) ของเทนเซอร์อัตราเครียด เมื่อ $i = j$ และอัตราการเสียรูปเชิงมุม (Angular deformation) ซึ่งจะอยู่นอกตำแหน่งทแยงมุม (Off-diagonal position) ของเทนเซอร์อัตราเครียด เมื่อ $i \neq j$ ถึงแม้ว่าโดยทั่วไปแล้วพฤติกรรมการไหลของวัสดุ จะเกิดทั้งอัตราการเสียรูปเชิงเส้นและเชิงมุมไปพร้อม ๆ กัน ทำให้เกิดการไหลแบบเฉือน และการไหลยืดดึงด้วยกันเสมอ แต่การแจกแจงตำแหน่งของเทนเซอร์อัตราเครียดในแนวทแยงและนอกแนวทแยงข้างต้น ทำให้สามารถแจกแจงประเภทของการไหลออกเป็น 2 ประเภท คือ การไหลแบบเฉือนสัมบูรณ์ (Pure shear) และการไหลที่ไม่มีเฉือน (Shear free flow) ในทางทฤษฎีการไหลแบบเฉือนสัมบูรณ์ จะเป็นการไหลที่มีค่าอัตราเครียดในตำแหน่งทแยงมุม ($i = j$) เป็นศูนย์ (0) ทั้งหมด และในทางกลับกัน การไหลที่ไม่มีเฉือนสัมบูรณ์ จะเป็นการไหลที่มีค่าอัตราเครียดนอกตำแหน่งทแยงมุม ($i \neq j$) เป็นศูนย์ (0) ทั้งหมด

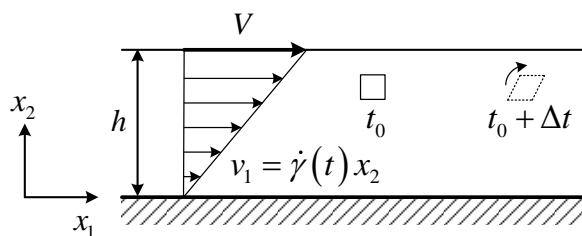
การไหลแบบเฉือน

ถ้าของไหลถูกเฉือนในช่องแคบไปในทิศทางที่ 1 ด้วยอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{21} = \dot{\gamma}(t)$ ดังแสดงในภาพที่ 2 ดังนั้นความหนืดของของไหลแบบนิวโทเนียนที่ไม่สามารถกดอัดได้ (Incompressible) จะมีความเค้นเฉือน τ_{21} ที่แปรผันตรงกับอัตราความเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{21}$ นั่นคือ

$$\mu = -\frac{\tau_{21}}{\dot{\gamma}_{21}} \tag{3}$$

เมื่อ μ คือความหนืดของของไหลชนิดนิวโทเนียน (Newtonian viscosity) ซึ่งเป็นค่าคงที่สำหรับการไหลที่มีอุณหภูมิคงที่ (Isothermal) ใด ๆ (Cengel & Cimbala, 2006; Munson, Young & Okiishi, 2002) ในทำนองเดียวกัน สำหรับของไหลแบบนอนนิวโทเนียนที่ความหนืดไม่คงที่ สามารถหาได้จาก

$$\eta(t, \dot{\gamma}) = -\frac{\tau_{21}(t, \dot{\gamma})}{\dot{\gamma}_{21}} \tag{4}$$



ภาพที่ 2 แสดงการไหลแบบเฉือนอย่างง่าย (Simple shear flow) ที่ไหลในทิศทาง x_1



โดยขนาดของอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ นิยามโดย

$$\dot{\gamma} \equiv \left| \dot{\underline{\underline{\gamma}}} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{\gamma}}} : \dot{\underline{\underline{\gamma}}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}} \quad (5)$$

เราเรียก $\eta(t, \dot{\gamma})$ ว่าความหนืดของของไหลชนิดนอนนิวโทเนียนที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา และขนาดของอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ แต่ถ้าเป็นการไหลคงตัวที่ไม่ขึ้นกับเวลา ความหนืดในการไหลแบบเฉือนคงตัว $\eta(\dot{\gamma})$ จะขึ้นอยู่กับขนาดของอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ เพียงอย่างเดียว และอาจจะมีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อขนาดของอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}$ เพิ่มขึ้นก็ได้ แต่อย่างไรก็ตามความหนืดของของไหลแบบเฉือนคงตัว จะลู่เข้าหาความหนืดที่การเฉือนเป็นศูนย์ (Zero shear viscosity) $\eta(0) = \eta_0$ เมื่อ $\dot{\gamma} \rightarrow 0$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (4) มีพฤติกรรมการไหลคล้ายนิวโทเนียน (Generalized Newtonian fluid) (Kolitawong, 2019b) และโดยทั่วไปแล้วคำว่า “รีโอโลยี” มักหมายถึงการไหลของของไหลชนิดนอนนิวโทเนียน ซึ่งความหนืดขึ้นอยู่กับอัตราเครียดตามสมการที่ (4) หรือเป็นของไหลชนิดนิวโทเนียน ซึ่งมีความหนืดคงที่ ที่มีความสัมพันธ์ของความเค้นเฉือน และอัตราเครียดเฉือนตามสมการที่ (3) ก็ได้ เราเรียกสมการที่มีความเค้น τ_{ij} เปลี่ยนไปตามอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{ij}$ ดังแสดงในสมการที่ (3) และ (4) ว่าสมการแสดงพฤติกรรมการไหล (Constitutive equations of fluid flows) (Bird, Stewart, Lightfoot & Klingenberg, 2015)

ถ้าวัสดุที่มีความยืดหยุ่นสูง (Elastic or hyperelastic material) ความเค้นเฉือน τ_{21} จะไม่ขึ้นอยู่กับอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}_{21}$ แต่จะสัมพันธ์กับความเครียดเฉือน γ_{21} ซึ่งเป็นไปตามกฎของฮุก (Hook's law) กล่าวคือ

$$G(t, \gamma) = -\frac{\tau_{21}(t, \gamma)}{\gamma_{21}} \quad (6)$$

เมื่อ $G(t, \gamma)$ คือ มอดุลัสยืดหยุ่นเฉือน (Shear elastic modulus) และมีความเครียดเฉือน $\gamma_{21} = \gamma(t)$ และในการเฉือนขนาดความเครียดเฉือน $\gamma(t)$ จะมีความสัมพันธ์กับอัตราเครียดเฉือน $\dot{\gamma}(t)$ โดย

$$\gamma(t_{ref}, t) \equiv \int_{t_{ref}}^t \dot{\gamma}(t') dt' = \gamma(t) - \gamma(t_{ref}) \quad (7)$$

โดย t_{ref} เป็นเวลาเริ่มต้นซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นศูนย์ (0) และโดยมาก $\gamma(0) = 0$ และในที่นี้ t' คือ ตัวแปรดัมมี่ของการอินทิเกรต ซึ่งจะหายไปหลังจากการแทนค่าเวลาตั้งแต่ $t' = t_{ref}$ ถึง $t' = t$ ไต ๆ แล้ว ค่ามอดุลัสยืดหยุ่นเฉือน $G(t, \gamma)$ ที่ขนาดความเครียด γ น้อย ๆ จะไม่ขึ้นอยู่กับขนาดความเครียด γ นั่นคือ



$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} G(t, \gamma) = G(t) \quad (8)$$

เมื่อ $G(t)$ คือ มอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้น หรือบางครั้งเรียกว่า “มอดุลัสผ่อนคลายเชิงเส้น” ที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของสเปกตรัมของเวลาผ่อนคลาย (Spectrum of relaxation times, λ_i) และมอดุลัสผ่อนคลาย (Spectrum of relaxation moduli, g_i)

$$G(t) = \sum_{i=1}^N g_i \exp(-t / \lambda_i) \quad (9)$$

เมื่อวัสดุความเครียด γ น้อย ๆ ($\gamma \rightarrow 0$) มอดุลัสผ่อนคลายเชิงเส้น $G(t)$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ ตามเวลา ทำให้มอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้น $G(t, \gamma)$ ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในสมการที่ (6) สามารถเขียนแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูปของมอดุลัสผ่อนคลายเชิงเส้น $G(t)$ และฟังก์ชันการหน่วง (Damping function, $h(\gamma)$) ได้ คือ

$$G(t, \gamma) = h(\gamma)G(t) \quad (10)$$

การไหลยืดดึง

ในการทำงานเดียวกันกับการไหลแบบเฉือน การไหลแบบยืดดึง (Elongational or stretching flow) เป็นการไหลที่ไม่มี การเฉือน (Shear free flow) โดยมีค่าอัตราเครียดที่อยู่นอกตำแหน่งทแยงมุม ($i \neq j$) เป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้เหลืออัตราเครียดในตำแหน่งแนวทแยงมุม (แกนหลัก) 3 พจน์เท่านั้น เมื่อแทนค่า $i = j$ ในสมการที่ (2) จะได้ (Kolitawong, 2019a)

$$\dot{\gamma}_{11} = 2\dot{\epsilon}_{11} = 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad (11)$$

$$\dot{\gamma}_{22} = 2\dot{\epsilon}_{22} = 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \quad (12)$$

$$\dot{\gamma}_{33} = 2\dot{\epsilon}_{33} = 2 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (13)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3$ นอกจากนี้ การไหลสำหรับวัสดุที่อัดตัวไม่ได้ ยังถูกควบคุมด้วยกฎอนุรักษ์มวล กล่าวคือ



$$\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0 \quad (14)$$

เมื่อ $\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ คืออัตรายืดดึง (Elongational rate) ในแนวแกน i ซึ่งเป็นเกรเดียนต์ความเร็วของวัสดุที่ถูกยืดดึงในแนวแกน i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ ดังแสดงในสมการที่ (11)-(13) ดังนั้น การทำการทดลองที่ง่ายที่สุดในการไหลที่ไม่มีการเฉือน จะเป็นการควบคุมความเร็วในทิศทางเดียวด้วยการดึงขึ้นทดสอบในแนว x_3 (ดูภาพที่ 3) ซึ่งเราเรียกว่า การยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial elongational flow) เหมาะกับขึ้นทดสอบที่เป็นเส้นใย หรือขึ้นทดสอบมาตรฐานตาม ASTM (ASTM D412-98a, 2003) ส่วนขึ้นทดสอบที่เป็นแผ่น จะเหมาะกับการทดสอบการยืดดึงสองทิศทาง (Biaxial stretching flow) และสุดท้าย จะกล่าวถึงการยืดดึงในระนาบ (Planar elongational flow) ซึ่งเป็นการทดสอบการยืดดึงที่ไม่มีการหมุน (Irrotational flow) ในเนื้อวัสดุ (Wangchai, 2005; Wangchai, Kolutawong, & Chaikittiratna, 2008 and 2011) โดยสมการความเร็วในการยืดดึงทั้ง 3 จะเขียนได้ดังนี้

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2}(1+b)x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2}(1-b)x_2 \\ \dot{\epsilon}(t)x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (15)$$

เมื่อ $\dot{\epsilon}(t)$ คืออัตรายืดดึง (Elongational rate) และ b มีค่าเป็น 0 หรือ 1 จะถูกกำหนดจากรูปแบบการยืดดึง และถูกสรุปไว้ในตารางที่ 1 เมื่อ $\dot{\epsilon}(t) > 0$ แสดงว่าการยืดดึงมีแอมพลิจูดเพิ่มขึ้นกับเวลา ในทางกลับกัน $\dot{\epsilon}(t) < 0$ แสดงว่าการยืดดึงมีแอมพลิจูดลดลงกับเวลา โดยความเครียดยืดดึงมีความสัมพันธ์กับอัตรายืดดึง คือ

$$\epsilon(t_{ref}, t) \equiv \int_{t_{ref}}^t \dot{\epsilon}(t') dt' = \epsilon(t) - \epsilon(t_{ref}) \quad (16)$$

โดย t_{ref} เป็นเวลาเริ่มต้นซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นศูนย์ (0) และโดยมาก $\epsilon(0) = 0$

ตารางที่ 1 สรุปค่าอัตรายืดดึง (Elongational rate) $\dot{\epsilon}(t)$ และตัวแปร b ที่ขึ้นอยู่กับรูปแบบการยืดดึง

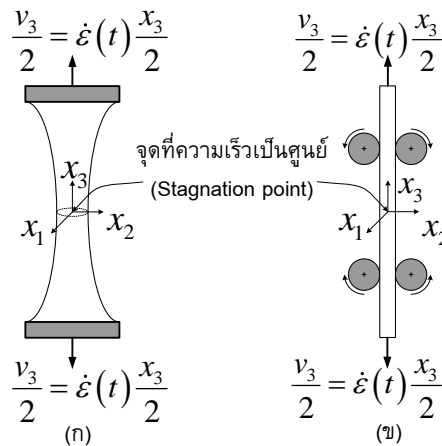
รูปแบบการยืดดึง	อัตรายืดดึง $\dot{\epsilon}(t)$	b
การดึงยืดทิศทางเดียว	$\dot{\epsilon}(t) > 0$	$b = 0$
การดึงยืดสองทิศทาง	$\dot{\epsilon}(t) < 0$	$b = 0$
การดึงยืดในระนาบ	$\dot{\epsilon}(t) > 0$	$b = 1$

การยืดดึงทิศทางเดียว

การทดลองที่ง่ายที่สุดในการไหลที่ไม่มี การเฉือน จะเป็นการควบคุมความเร็วในทิศทางเดียว ด้วยการดึงขึ้นทดสอบตามมาตรฐานของ ASTM เช่น การดึงเส้นใย (ภาพที่ 3 (ก)) หรือแผ่นรูปทรงคล้ายถ้วยเดี่ยวเส้นใหญ่ (ภาพที่ 3(ข)) เป็นต้น ซึ่งแน่นอนว่า จะเกิดการหดตัวของหน้าตัดที่ตั้งฉากกับทิศทางดึงตามกฎอนุรักษ์มวลสำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ (Incompressible materials) เราเรียกการดึงชนิดนี้ว่า การยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial elongational flow) จากสมการที่ (15) เมื่อเราออกแรงดึงในทิศทางที่ 3 ด้วยอัตรายืดดึง (Elongational rate) $\dot{\epsilon}(t)$ ดังนั้นความเร็วที่ได้จากการดึงยืด คือ

$$v_3 = \dot{\epsilon}(t) x_3 \tag{17}$$

เมื่อ



ภาพที่ 3 แสดงการดึงในทิศทางเดียวของ (ก) เส้นใย และ (ข) แผ่นฟิล์ม ในรูปแสดงจุดที่ความเร็วเป็นศูนย์ (Stagnation point) เกิดขึ้นที่พิกัด (0, 0, 0) ของชั้นทดสอบ



ภาพที่ 4 แสดงระยะทางระหว่างก่อนอนุภาคของไหลในการดึงทิศทางเดียว ที่ถูกดึงด้วยอัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ (ก) ก่อนอนุภาคของไหลที่เวลา t_0 และ (ข) ก่อนอนุภาคของไหลที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เส้นที่มุมบนขวา แสดงเส้นทางการไหล (Streamlines) ในเนื้อวัสดุ



$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_{33} \quad (18)$$

ซึ่ง $\dot{\epsilon}(t)$ มีค่าเป็นบวกเสมอ นั่นคือ $\dot{\epsilon}(t) > 0$ และถ้ากำหนดให้ความเร็ว $v_1 = v_2$ กฎอนุรักษ์มวลในสมการที่ (14) ทำให้เราทราบว่า

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2} x_2 \\ \dot{\epsilon}(t) x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad \dot{\epsilon}(t) > 0, b = 0 \quad (19)$$

ในสมการที่ (19) เครื่องหมายในแนวแกน x_1 และ x_2 เป็นลบขณะที่เครื่องหมายในแนวแกน x_3 เป็นบวก ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากการอนุรักษ์มวลของวัสดุ โดยพิจารณาได้จากภาพที่ 3 (ก) เมื่อวัสดุยืดในแนวแกน x_3 วัสดุจะหดในอีกสองแนวแกนที่เหลือ ในที่นี่จะใช้การไหลยืดดึงทิศทางเดียวคงตัว (Steady uniaxial elongational flow) เพื่อถ่ายทอดการวิเคราะห์ทางกายภาพของสมบัตริโพลีในการไหลยืดดึง และเนื่องจากการทดสอบสมบัตริโพลี จะกระทำที่อัตรายืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ ใด ๆ ดังนั้น $\dot{\epsilon}(t)$ จะลดรูปเป็น $\dot{\epsilon}_0 = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา ดังแสดงในภาพที่ 4 ดังนั้นสมการที่ (19) ลดรูปเป็น

$$\bar{v}_{Steady\ elongation} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} x_2 \\ \dot{\epsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (20)$$

และมีความเร่งเท่ากับ

$$\bar{a}_{Steady\ elongation} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \dot{\epsilon}_0 \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} v_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}_0}{2} v_2 \\ \dot{\epsilon}_0 v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \dot{\epsilon}_0^2 x_1 \\ \frac{1}{4} \dot{\epsilon}_0^2 x_2 \\ \dot{\epsilon}_0^2 x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (21)$$

ความเร่งในคอลัมน์สุดท้ายของสมการที่ (21) เขียนอยู่ในรูปของตำแหน่ง x_1 , x_2 และ x_3 ได้จากการแทนค่าความเร็ว v_1 , v_2 และ v_3 จากสมการที่ (20) จะเห็นได้ว่าก่อนอนุภาคของไหลที่ถูกดึงแบบอัตรายืดดึงคงตัว จะมีความเร่งที่แปรผันตรงกับ $\dot{\epsilon}_0^2$



โดย

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \dot{\varepsilon}_0 x_3 \quad (22)$$

อินทิเกรตตั้งแต่วเวลา $t = t_0$ กลุ่มของไหลอยู่ที่ตำแหน่ง $x_3 = \ell_0/2$ ถึงเวลา $t = t_0 + \Delta t$ กลุ่มของไหลอยู่ที่ตำแหน่ง $x_3 = \ell/2$

$$\int_{\ell_0/2}^{\ell/2} \frac{dx_3}{x_3} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \dot{\varepsilon}_0 dt \quad (23)$$

ดังนั้น ระยะ ℓ ระหว่างกลุ่มของไหลที่อยู่ในการดึงแบบคงตัว จะมีค่าเท่ากับ

$$\ell = \ell_0 \exp(\dot{\varepsilon}_0 \Delta t) \quad (24)$$

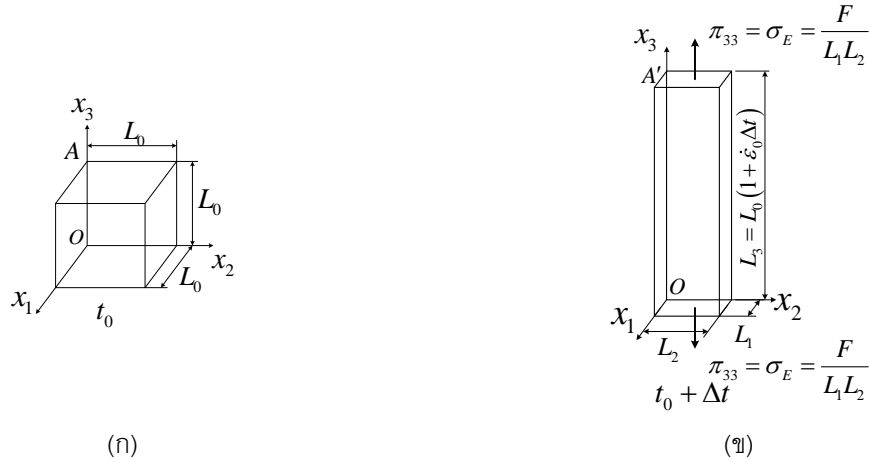
สมการที่ (24) แสดงให้เห็นว่า การเดินทางของก้อนอนุภาคของไหลที่ถูกยึดดึงทิศทางเดียว ที่มีอัตรายืดคงตัวในภาพที่ 4 จะมีการเดินทางแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลในช่วงระยะเวลา Δt เมื่อนำเอาก้อนอนุภาคของไหล (Fluid element) ในภาพที่ 4 มาพิจารณารายละเอียดในภาพที่ 5 จะเห็นว่า ที่เวลาเริ่มต้น t_0 ในภาพที่ 5(ก) ก้อนอนุภาคของไหลมีขนาด L_0 และที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ก้อนอนุภาคของไหลถูกดึงให้ยืดออกไปในทิศทาง x_3 จากขนาดเดิม OA ไปเป็น OA' ซึ่งมีระยะยืดเท่ากับ $AA' = L_0 \dot{\varepsilon}_0 \Delta t$ ดังแสดงในภาพที่ 5(ข) จะเห็นได้ว่ก้อนอนุภาคของไหลจะมีปริมาตรใหม่คือ $L_1 L_2 L_3$ โดย L_3 จะมีขนาดเท่ากับ

$$L_3 = L_0 (1 + \dot{\varepsilon}_0 \Delta t) \quad (25)$$

และขนาด L_1 และ L_2 จะหดเข้าเป็นระยะทางที่เท่า ๆ กันเนื่องจากกฎการอนุรักษ์มวลสำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ นั่นคือ

$$L_1 = L_2 = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \dot{\varepsilon}_0 \Delta t}} \quad (26)$$

จากพฤติกรรมของวัสดุในการยึดดึงทิศทางเดียวที่แตกต่างจากการไหลแบบเฉือน ทำให้เราสามารถกำหนดความหนืดของการไหลที่ไม่มีการเฉือนแตกต่างจากการไหลแบบเฉือน ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดในหัวข้อถัดไป



ภาพที่ 5 แสดงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของก้อนอนุภาคของไหลในการยืดดึงทิศทางเดียวจากปริมาตร L_0^3 ที่เวลา t_0 ในรูป (ก) เป็นปริมาตร $L_1 L_2 L_3$ ที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ในรูป (ข) เมื่อได้รับแรงดึง F

เมื่อแทนค่าความเร็วทั้งสามแนวแกนในสมการที่ (19) ลงในสมการที่ (2) จะได้เทนเซอร์อัตราเครียด

$$\underline{\dot{\gamma}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} & \dot{\gamma}_{13} \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} & \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} & \dot{\gamma}_{32} & \dot{\gamma}_{33} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123} \quad (27)$$

แทนค่าสมการที่ (27) ลงในสมการที่ (5) จะได้ขนาดของเทนเซอร์อัตราเครียด $\dot{\gamma}$ ในการยืดดึงทิศทางเดียวคือ

$$\dot{\gamma} = + \sqrt{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123} : \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123}} = \sqrt{3}\dot{\epsilon}(t) \quad (28)$$

โดยของไหลเป็นวัสดุของไหลแบบนอนนิวโทเนียน จะเห็นได้ว่าการยืดดึงทิศทางเดียว จะมีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ตามความสัมพันธ์ในสมการที่ (1) ซึ่งเป็นแรงภายในของวัสดุ คือ

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}_{123} = -\eta(t, \dot{\gamma}) \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123} \quad (29)$$



จากการเทียบพจน์ในแนวทแยงมุมของสมการที่ (29) แสดงให้เห็นว่าความหนืดของของไหลชนิดนอนนิวโทเนียน $\eta(t, \dot{\gamma})$ ในการยืดดึงทิศทางเดียว คือ

$$\eta(t, \dot{\gamma}) = -\frac{\tau_{33}}{2\dot{\epsilon}(t)} = \frac{\tau_{11}}{\dot{\epsilon}(t)} = \frac{\tau_{22}}{\dot{\epsilon}(t)} \quad (30)$$

เมื่อ $\dot{\gamma} = \sqrt{3}\dot{\epsilon}(t)$ ตามสมการที่ (28) และมีเทนเซอร์ความเค้นรวม (Total stress tensor, $\underline{\underline{\pi}}$) ในการยืดดึงทิศทางเดียว ดังนี้

$$\underline{\underline{\pi}} = P\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} + P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} + P & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} + P \end{pmatrix}_{123} \quad (31)$$

เมื่อ P เป็นความดันและ $\underline{\underline{\delta}}$ เป็นเทนเซอร์หนึ่งหน่วย จากแผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของก้อนอนุภาคของไหลที่ถูกยืดดึงทิศทางเดียวในภาพที่ 5(ข) แรงภายนอกมีเพียงแรง F ที่ก่อให้เกิดความเค้น σ_E ดังนั้นสมดุลแรง (Force balance) แบบกึ่งสถิต (Quasi-static) ที่มีอัตราการยืดดึงน้อย ๆ กล่าวคือ $\dot{\epsilon}(t) \rightarrow 0$ สมการที่ (31) ลดรูปเป็น

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_E \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \tau_{11} + P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} + P & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} + P \end{pmatrix}_{123} \quad (32)$$

สมการที่ (32) เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอก และแรงภายในของวัสดุ จะเห็นได้ว่า (ดูบทที่ 2 ของ Shaw & MacKnight, 2005)

$$P = -\tau_{11} \quad (33)$$

$$\tau_{22} + P = 0 \quad (34)$$

$$\tau_{33} + P = \sigma_E \quad (35)$$

แทนค่า $P = -\tau_{11}$ ลงในสมการที่ (34) และ (35) จะได้

$$\tau_{22} - \tau_{11} = 0 \quad (36)$$

$$\tau_{33} - \tau_{11} = \sigma_E \quad (37)$$

ดังนั้นจากนิยามความหนืดยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial elongational viscosity) คือ

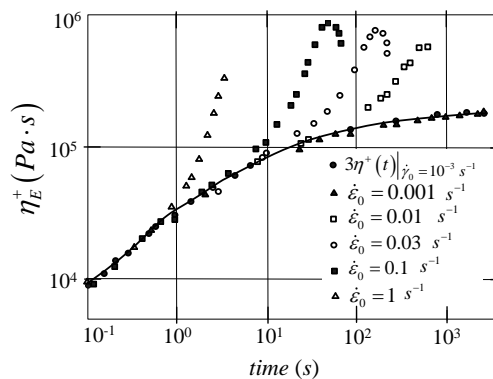
$$\eta_E(t, \dot{\epsilon}) \equiv -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}(t)} = -\frac{\sigma_E}{\dot{\epsilon}(t)} \quad (38)$$

และนิยามมอดุลัสยืดหยุ่นของยังส์ (Young's elastic modulus) คือ

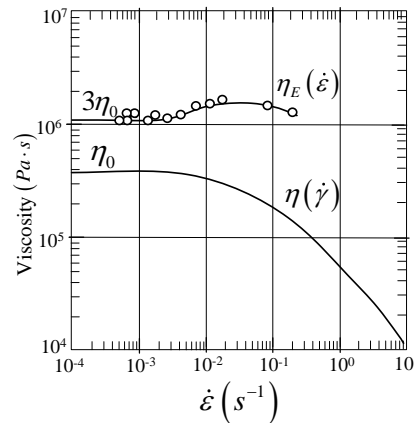
$$E(t, \epsilon) \equiv -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\epsilon(t)} = -\frac{\sigma_E}{\epsilon(t)} \quad (39)$$

โดยความเครียดยืดดึง $\epsilon(t)$ หาได้จากสมการที่ (16) สำหรับการทดสอบยืดดึงที่ $\dot{\epsilon}_0$ ใดๆ จะกระทำที่อัตรายืดดึงคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ ใด ๆ เมื่อแทนค่า $\tau_{11}(t, \dot{\epsilon}_0) = \tau_{22}(t, \dot{\epsilon}_0) = \eta(t, \dot{\gamma}_0) \dot{\epsilon}_0$ และ $\tau_{33}(t, \dot{\epsilon}_0) = -2\eta(t, \dot{\gamma}_0) \dot{\epsilon}_0$ จากสมการที่ (30) แทนลงในสมการที่ (38) ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0$ จะได้

$$\lim_{\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_E(t, \dot{\epsilon}_0) = \eta_E^+(t) = 3\eta(t) \quad (40)$$



ภาพที่ 6 แสดงความหนืดยืดดึงจากการทดสอบการเกิดความเค้นยืดดึงทิศทางเดียว $\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}_0)$ ของพอลิเอทิลีนความหนาแน่นต่ำหลอม (LDPE melt) ที่อุณหภูมิ $T = 150^\circ C$ ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0$ จะมีค่าเป็น 3 เท่า ของความหนืดเฉือนจากการทดสอบการเกิดความเค้นเฉือน $\eta^+(t)$ (ดึงข้อมูลมาจาก ภาพที่ 3.5-3 ของ Bird *et al.*, 1987)



ภาพที่ 7 แสดงความหนืดยืดดึง $\eta_E(\dot{\epsilon}_0)$ ของพอลิสไตรีนหลอม IV (Polystyrene melt IV) ที่อุณหภูมิ $T = 160^\circ C$ ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0$ จะมีค่าเป็น 3 เท่า ของความหนืดที่การเฉือนเป็นศูนย์ η_0 ที่ได้จากการทดสอบเฉือน (ดึงข้อมูลมาจาก ภาพที่ 3.5-1 ของ Bird *et al.*, 1987)

เมื่อ $\dot{\gamma}_0 = \sqrt{3}\dot{\epsilon}_0$ ตามสมการที่ (28) สมการที่ (40) สอดคล้องกับภาพที่ 6 ที่แสดงความหนืดยืดดึงจากการทดสอบการเกิดความเค้นยืดดึงทิศทางเดียว $\eta_E^+(t, \dot{\epsilon}_0)$ ของพอลิเอทิลีนความหนาแน่นต่ำหลอม (LDPE melt) ที่อุณหภูมิ $T = 150^\circ C$ ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0$ จะมีค่าเป็น 3 เท่า ของความหนืดเฉือนจากการทดสอบการเกิดความเค้นเฉือน $\eta^+(t)$ (Messner, 1985)

$$\lim_{\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_E^+(t, \dot{\epsilon}_0) = \eta_E^+(t) = 3\eta^+(t) \quad (41)$$

สมการที่ (40) ได้รับการยืนยันจาก (Khan & Larson, 1987; 1990) ในการทดสอบวัสดุ PS, HDPE และ IUPAC A อีกด้วย และที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0$ ณ. อุณหภูมิ T ใดๆ ในการทดสอบความหนืดยืดดึงทิศทางเดียวคงตัว $\eta_E(\dot{\epsilon}_0)$ ที่มีการเสียรูปไม่เป็นเชิงเส้น จะมีค่าเป็น 3 เท่า ของความหนืดที่การเฉือนเป็นศูนย์ (Zero shear viscosity) η_0 ดังแสดงในภาพที่ 7 (ดูหน้า 133 ของ Bird *et al.*, 1987; Münstedt, 1980)

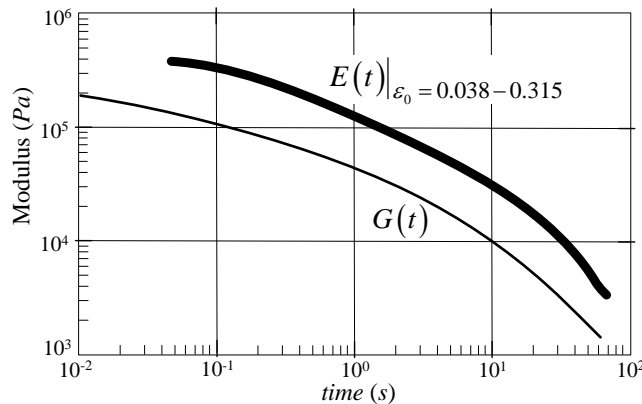
$$\lim_{\dot{\epsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_E(\dot{\epsilon}_0) = 3\eta_0 \quad (42)$$

และความหนืดยืดดึงทิศทางเดียวคงตัว $\eta_E(\dot{\epsilon}_0)$ สำหรับของไหลนิวโทเนียนบางครั้งจะถูกเรียกว่า “ความหนืดทรูตัน” η_T (Trouton viscosity) เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ค้นพบความสัมพันธ์นี้ (Trouton, 1906)

ในการทำงานเดียวกันสำหรับการทดสอบยืดดึงไม่คงตัว จากสมการที่ (39) เมื่อความเครียดยืดดึงคงที่ใด ๆ $\epsilon(t) = \epsilon_0$ แทนค่า $\tau_{11}(t, \epsilon_0) = \tau_{22}(t, \epsilon_0) = G(t, \epsilon_0)\epsilon_0$ และ $\tau_{33}(t, \epsilon_0) = -2G(t, \epsilon_0)\epsilon_0$ เมื่อ $\epsilon_0 \rightarrow 0$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่ามอดูลัสยืดหยุ่นของยังส์ $E(t, \epsilon_0)$ มีค่าเป็น 3 เท่าของมอดูลัสยืดหยุ่นเฉือนเชิงเส้น $G(t)$

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} E(t, \varepsilon_0) = E(t) = 3G(t) \tag{43}$$

โดยค่ามอดุลัสยืดหยุ่นที่ไม่เป็นเชิงเส้น $E(t, \varepsilon_0)$ สำหรับวัสดุที่มีสมบัติยืดหยุ่น (Purely elastic) และยืดหยุ่นสูง ๆ (Hyper elastic) ที่เป็นเนื้อเดียว (Homogeneous) จะไม่ขึ้นกับอัตรายืดดึง $\dot{\varepsilon}(t)$ ในทำนองเดียวกันที่ลิมิต $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ณ อุณหภูมิ T ใด ๆ มอดุลัสการคลายความเค้นยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial extensional relaxation modulus) จะไม่ขึ้นอยู่กับความเครียดยืดดึงอีกด้วย กล่าวคือ $\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} E(t, \varepsilon_0) = E(t)$ ที่มีการเสียรูปไม่เป็นเชิงเส้น จะมีค่าเป็น 3 เท่า ของมอดุลัสผ่อนคลายเชิงเส้น $G(t)$ ที่ได้จากการทดสอบแบบเฉือน ดังแสดงในภาพที่ 8 (Barroso *et al.*, 2003 และดูหัวข้อ 7.15 ของ Callister & Rethwisch, 2015) ในทำนองเดียวกันกับการทดสอบยืดดึงทิศทางเดียวค่า $\tau_{22} - \tau_{11}$ และ $\tau_{33} - \tau_{11}$ จะเป็นค่าที่ใช้ในการคำนวณเพื่อกำหนดสมบัติของวัสดุในการทดสอบยืดดึงสองทิศทางและยืดดึงในระนาบด้วย



ภาพที่ 8 แสดงมอดุลัสการคลายความเค้นยืดดึงทิศทางเดียว $E(t)$ ของพอลิไอโซบิวทาลีน B15 (Polyisobutylene B15) ที่อัตรายืดดึงต่ำ ๆ ($\varepsilon_0 = 0.038 - 0.315$) ณ อุณหภูมิ $T = 25^\circ C$ มีค่าเป็น 2.9 เท่าของมอดุลัสผ่อนคลายเชิงเส้น $G(t)$ ที่ได้จากการทดสอบเฉือนเป็นรอบ (Oscillatory shear)

การยืดดึงสองทิศทาง

ขึ้นงานที่เป็นแผ่นบางจะเหมาะกับการยืดดึงสองทิศทาง (Biaxial stretching flow) ซึ่งแน่นอนว่าวัสดุจะเกิดการหดตัวในทิศทางที่ 3 การทดสอบวัสดุแบบนี้จะคล้ายกับกระบวนการเป่าถุง (Film blowing) การขึ้นรูปด้วยระบบสูญญากาศ (Vacuum forming) และการเป่าเข้าแม่พิมพ์ (Blow molding) ที่ต้องดึงยืดพอลิเมอร์ให้เป็นแผ่นบาง ๆ การทดสอบด้วยการยืดดึงสองทิศทางนี้ ถ้าขึ้นงานมีขนาดหนาบางครั้งอาจใช้วิธีกดอัด (Squeezing flow) ขึ้นทดสอบบนผิวที่หล่อลื่น (Lubricated surfaces) อย่างดีในทิศทางที่ 3 และให้วัสดุยืดตัวออกในทิศทางที่ 1 และ 2 ด้วยอัตรายืดดึงที่เท่ากันดังแสดงในภาพที่ 9(ก) (Song, Zheng & Wang, 2007) หรือใช้วิธีเป่าแผ่นฟิล์มให้พองลม (Bubble inflation method) ดังแสดงในภาพที่ 9(ข) ก็ได้ เมื่อพิจารณาสมการความเร็วในเนื้อวัสดุของการดึงในสองทิศทาง จะคล้ายกับการทดสอบการยืดดึงทิศทางเดียวเว้นแต่อัตรายืดจะน้อยกว่าศูนย์ ($\dot{\varepsilon}(t) < 0$)



ภาพที่ 9 แสดงการทดสอบการยืดดึงสองทิศทาง (Biaxial stretching flow) ด้วย (ก) วิธีกดอัด (Squeezing flow) และ (ข) วิธีเป่าแผ่นฟิล์มให้พองลม (Bubble inflation method)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2} x_1 \\ -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2} x_2 \\ \dot{\epsilon}(t) x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad \dot{\epsilon}(t) < 0, b = 0 \quad (44)$$

และนิยามอัตรายืดดึงสองทิศทาง $\dot{\epsilon}_B(t)$ คือ

$$\dot{\epsilon}_B(t) \equiv -\frac{\dot{\epsilon}(t)}{2} \quad (45)$$

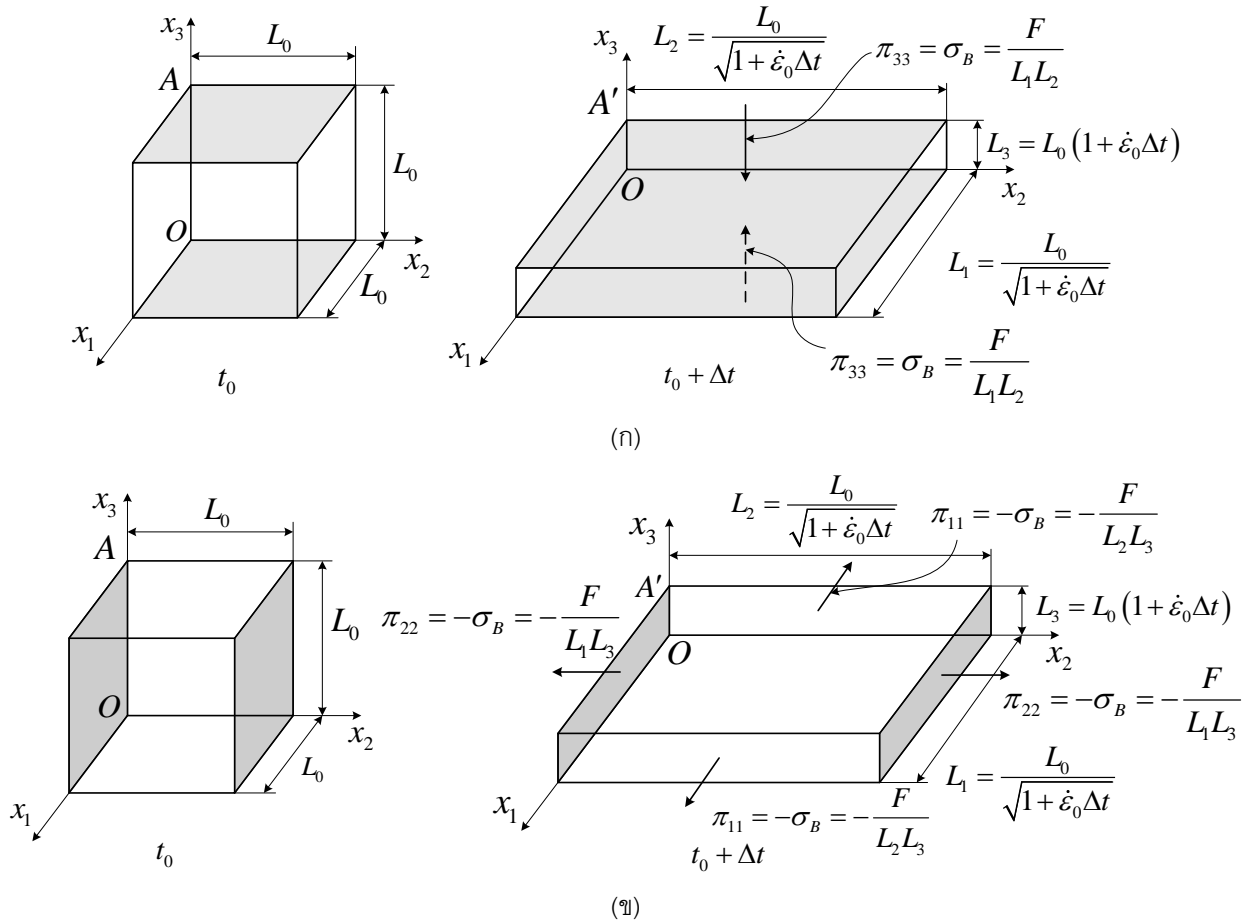
เนื่องจากสมการความเร็วในแนวรัศมีของการยืดดึงสองทิศทาง จะคล้ายกับการทดสอบการยืดดึงทิศทางเดียว ดังนั้น การวิเคราะห์การเดินทางในการยืดดึงสองทิศทาง จึงคล้ายกับการทดสอบการยืดดึงทิศทางเดียว เว้นแต่อัตรายืดในการยืดดึงสองทิศทางจะน้อยกว่าศูนย์ ($\dot{\epsilon}(t) < 0$) เท่านั้น เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนรูปของก้อนอนุภาคของไหล (Material elements) ที่อยู่ในการยืดสองทิศทางด้วยวิธีกดอัด (Squeezing flow) ดังแสดงในภาพที่ 10 ที่เวลาเริ่มต้น t_0 ก้อนอนุภาคของไหลมีขนาด L_0^3 ดังแสดงในภาพที่ 10(ก) และที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ก้อนอนุภาคของไหลถูกดึงให้ยืดออกไปในทิศทาง x_1 และ x_2 ทำให้ขนาดในทิศทาง x_3 หดลงจากขนาดเดิม OA ไปเป็น OA' ซึ่งมีระยะเท่ากับ $AA' = L_0 \dot{\epsilon}_0 \Delta t$ ดังแสดงในภาพที่ 10(ข) จะเห็นได้ว่าก้อนอนุภาคของไหลจะมีปริมาตรใหม่คือ $L_1 L_2 L_3$ โดย L_3 จะมีขนาดเท่ากับ

$$L_3 = L_0 (1 + \dot{\epsilon}_0 \Delta t) \quad (46)$$

และขนาด L_1 และ L_2 จะยืดออกเป็นระยะทางที่เท่า ๆ กัน เนื่องจากกฎการอนุรักษ์มวลสำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ นั่นคือ

$$L_1 = L_2 = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \dot{\epsilon}_0 \Delta t}} \quad (47)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการยืดดึงสองทิศทางมีจลนศาสตร์การไหล (Flow kinematics) เหมือนกับการยืดดึงในทิศทางเดียวที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงเส้น โดยการเดินทางของก้อนอนุภาคของไหล ที่ถูกยืดดึงสองทิศทางที่มีอัตรายืดคงตัว จะมีการเดินทางแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลในช่วงระยะเวลา Δt



ภาพที่ 10 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของก้อนอนุภาคของไหลในการยืดดึงสองทิศทางจากปริมาตร L_0^3 ที่เวลา t_0 ในรูปเป็นปริมาตร $L_1 L_2 L_3$ ที่เวลา $t_0 + \Delta t$ (ก) สมดุลแรงของการยืดดึงสองทิศทางด้วย $\pi_{33} = \sigma_B$ ในการทดสอบการกดอัด (Squeezing flow) (ข) สมดุลแรงของการยืดดึงสองทิศทางด้วยการยืดดึงด้วย $\pi_{11} = -\sigma_B$ และ $\pi_{22} = -\sigma_B$ ในการทดสอบด้วยวิธีเป่าแผ่นฟิล์มให้พองลม (Bubble inflation method)

คล้ายกับการยืดดึงในทิศทางเดียว แผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของกลุ่มของไหลที่ถูกยืดดึงสองทิศทางในภาพที่ 10 ในการยืดดึงสองทิศทางแรงภายนอกมีเพียงแรง F ที่ก่อให้เกิดความเค้น σ_B ซึ่งสมดุลแรงแบบกึ่งสแตติกที่มี



อัตราการยืดตึงน้อย ๆ $\dot{\epsilon}(t) \rightarrow 0$ ของการทดสอบแบบกดอัด และการทดสอบแบบเป่าฟิล์มให้พองลม มีสมการสมดุลแรงเดียวกัน ดังนั้นจากนิยามความหนืดยืดตึงสองทิศทาง (Biaxial elongational viscosity) คือ

$$\eta_B(t, \dot{\epsilon}_B) \equiv -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}_B(t)} = -\frac{\sigma_B}{\dot{\epsilon}_B(t)} \quad (48)$$

และมอดูลัสยืดหยุ่นของยังส์ (Young's elastic modulus) ในการทดสอบยืดตึงสองทิศทาง $E_B(t, \epsilon_B)$ จะคล้ายกับการทดสอบยืดตึงในทิศทางเดียวในสมการที่ (39) คือ

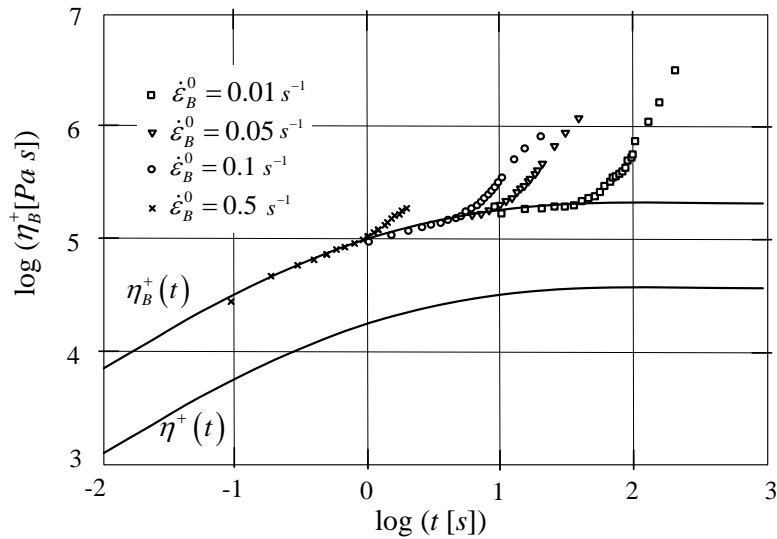
$$E_B(t, \epsilon_B) \equiv -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\epsilon_B(t)} = -\frac{\sigma_B}{\epsilon_B(t)} \quad (49)$$

ในการทำงานเดียวกันกับการทดสอบยืดตึงทิศทางเดียว ค่ามอดูลัสยืดหยุ่นของยังส์ $E_B(t, \epsilon_B)$ สำหรับวัสดุที่มีสมบัติยืดหยุ่น (Purely elastic) และยืดหยุ่นสูง ๆ (Hyper elastic) ที่เป็นเนื้อเดียว (Homogeneous) จะไม่ขึ้นกับอัตราการยืดตึง $\dot{\epsilon}(t)$ (ดูหัวข้อ 2.6 ของ Menard, 2008) สำหรับการทดสอบยืดตึงคงตัว จะกระทำที่อัตราการยืดตึงสองทิศทางคงที่ $\dot{\epsilon}_B^0$ ใด ๆ ในขณะที่มีลิมิต $\dot{\epsilon}_B^0 \rightarrow 0$ ณ อุณหภูมิ T ใด ๆ พังก์ชันความหนืดยืดตึงสองทิศทาง $\eta_B(t, \dot{\epsilon}_B^0)$ ที่ไม่เป็นเชิงเส้น จะมีค่าเป็น 6 เท่าของความหนืดเฉือน $\eta(t)$

$$\lim_{\dot{\epsilon}_B^0 \rightarrow 0} \eta_B(t, \dot{\epsilon}_B^0) = \eta_B(t) = 6\eta(t) \quad (50)$$

เมื่อ $\dot{\gamma}_0 = -2\sqrt{3}\dot{\epsilon}_B^0$ ตามสมการที่ (28) และ (45) สมการที่ (50) ได้รับการยืนยันจากภาพที่ 11 ที่แสดงความหนืดยืดตึงจากการทดสอบการเกิดความเค้นยืดตึงสองทิศทาง $\eta_B^+(t, \dot{\epsilon}_B^0)$ พอลิสไตลีน (Polystyrene) ที่อุณหภูมิ $T = 180^\circ C$ ด้วยเทคนิคการกดอัดขึ้นทดสอบบนผิวที่หล่อลื่น ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_B^0 \rightarrow 0$ จะมีค่าเป็น 6 เท่าของความหนืดเฉือนจากการทดสอบการเกิดความเค้นเฉือน $\eta^+(t)$ ที่อุณหภูมิเดียวกัน (Soskey & Winter, 1985)

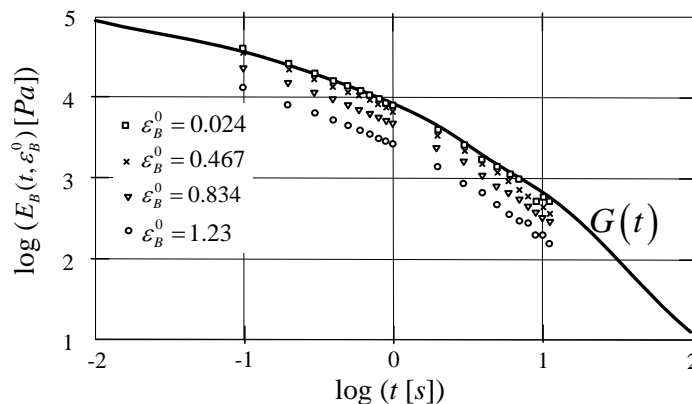
$$\lim_{\dot{\epsilon}_B^0 \rightarrow 0} \eta_B^+(t, \dot{\epsilon}_B^0) = \eta_B^+(t) = 6\eta^+(t) \quad (51)$$



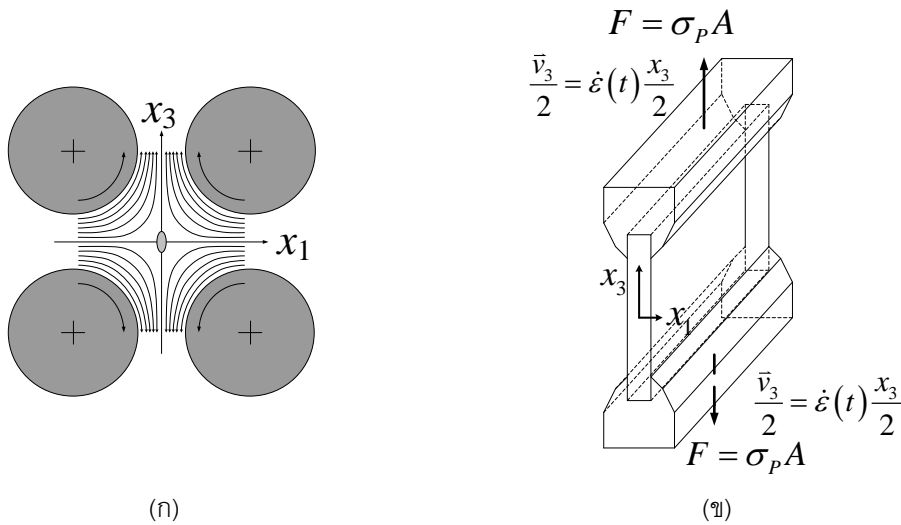
ภาพที่ 11 แสดงฟังก์ชันความหนืดยืดดึงสองทิศทาง $\eta_B^+(t, \dot{\epsilon}_B^0)$ ของพอลิสไตลีน (Polystyrene) ที่อุณหภูมิ $T = 180^\circ C$ ด้วยเทคนิคการกดอัดขึ้นทดสอบบนผิวที่หล่อลื่น เปรียบเทียบกับความหนืดที่ได้จากการทดสอบการเกิดความเค้นเฉือน $\eta^+(t)$ ที่อุณหภูมิเดียวกัน (ดึงข้อมูลมาจาก Soskey & Winter, 1985)

ในทำนองเดียวกัน ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_B^0 \rightarrow 0$ ณ อุณหภูมิ T ใด ๆ มอดุลัสมอดุลัสยืดหยุ่นของยังส์ในการทดสอบความเค้นยืดดึงสองทิศทาง (Biaxial extensional Young modulus) ที่มีการเสียรูปไม่เป็นเชิงเส้น $E_B(t, \dot{\epsilon}_B^0)$ จะเป็น 6 เท่า ของมอดุลัสเฉือนของวัสดุวิสโคอิลาสติกเชิงเส้น $G(t)$ ดังแสดงในภาพที่ 12 (Soskey & Winter, 1985)

$$\lim_{\dot{\epsilon}_B^0 \rightarrow 0} E_B(t, \dot{\epsilon}_B^0) = E_B(t) = 6G(t) \quad (52)$$



ภาพที่ 12 แสดงมอดุลัสมอดุลัสยืดหยุ่นของยังส์ในการทดสอบความเค้นยืดดึงสองทิศทาง $E_B(t, \dot{\epsilon}_B^0)$ ของพอลิสไตลีน (Polystyrene) ที่อุณหภูมิ $T = 180^\circ C$ ด้วยเทคนิคการกดอัดขึ้นทดสอบบนผิวที่หล่อลื่น เปรียบเทียบกับมอดุลัสเฉือนของวัสดุวิสโคอิลาสติกเชิงเส้น $G(t)$ ที่อุณหภูมิเดียวกัน (ดึงข้อมูลมาจาก Soskey & Winter, 1985)



ภาพที่ 13 แสดงการยืดดึงในระนาบด้วย (ก) วิธียืดดึงด้วยลูกกลิ้งสี่ตัวของเทอร์เลอร์ (Taylor's four-roller apparatus) หมุนปั่นของเหลวเพื่อยืดดึงหยดสารละลายเหลวที่อยู่ตรงกลาง และ (ข) วิธีดึงแผ่นชิ้นงานด้วยเครื่องทดสอบการยืดดึง (Tensile test machine)

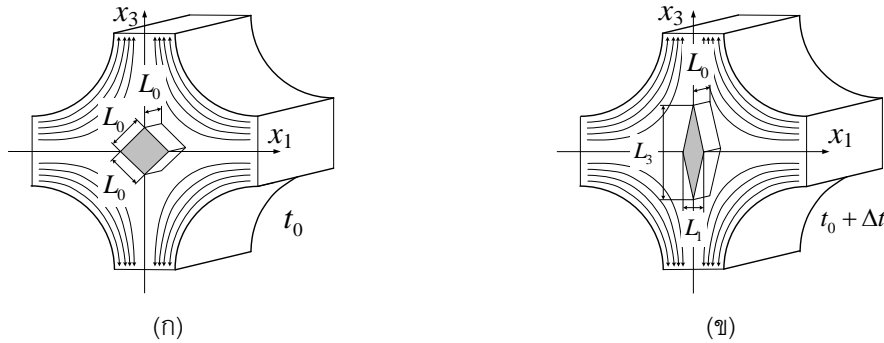
การยืดดึงในระนาบ

การยืดดึงในระนาบ (Planar elongational flow) จะเป็นการยืดในทิศทางที่ 3 และบังคับให้หดตัวในทิศทางที่ 1 เท่านั้น สมการความเร็วของการยืดดึงในระนาบ คือ

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}(t) x_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}(t) x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad \dot{\epsilon}(t) > 0, b = 1 \quad (53)$$

เมื่อวัสดุจะถูกยืดดึงไปในทิศทางที่ 3 ทางเดียวดังแสดงในภาพที่ 13(ก) โดยใช้ลูกกลิ้งสี่ตัวของเทอร์เลอร์ (Taylor's four-roller apparatus) หมุนปั่นของเหลวเพื่อยืดดึงหยดสารละลายเหลวที่อยู่ตรงกลาง (Taylor, 1934; Sharma, Furusawa, Fukui & Sasaki, 2014; Brimmo & Qasaimah, 2017) แต่ถ้าเป็นวัสดุหนืดยืดหยุ่น เช่น ยางคงรูปอาจใช้วิธีดึงแผ่นชิ้นงานด้วยเครื่องทดสอบการยืดดึง (Tensile test machine) โดยขึ้นทดสอบควรมีความยาวมากกว่าความกว้างมาก ๆ และดึงขึ้นทดสอบในแนวยาวดังแสดงในภาพที่ 13(ข) (Wangchai, 2005; Wangchai, Kolitawong, & Chaikittiratna, 2008 and 2011)

เพื่อง่ายต่อการวิเคราะห์ทางกายภาพของสมบัติรีโอโลยีในการไหลยืดดึง และเนื่องจากการทดสอบสมบัติรีโอโลยี จะกระทำที่อัตรายืดดึงคงตัว $\dot{\epsilon}_0$ ใด ๆ ดังนั้นในที่นี้ จะใช้การดึงในระนาบแบบอัตรายืดดึงคงตัว (Steady planar elongational flow) $\dot{\epsilon}(t)$ จะลดรูปเป็นค่าคงที่ $\dot{\epsilon}_0$ ดังนั้นสมการที่ (53) ลดรูปเป็น



ภาพที่ 14 แสดงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของก้อนอนุภาคของไหล ที่อยู่ในการยืดดึงในระนาบที่เป็นรูปลูกบาศก์ปริมาตร L_0^3 ที่เวลา t_0 ในภาพ (ก) เป็นรูปสี่เหลี่ยมหน้าตัดขนมเปียกปูนปริมาตร $\frac{1}{2}L_0L_1L_3$ ที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ในภาพ (ข)

$$\vec{v}_{\text{Steady planar elongation}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}_0 x_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_0 x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (54)$$

และมีความเร่งเท่ากับ

$$\vec{a}_{\text{Steady planar elongation}} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}_0 \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_0 \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\dot{\epsilon}_0 v_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_0 v_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_0^2 x_1 \\ 0 \\ \dot{\epsilon}_0^2 x_3 \end{pmatrix}_{123} \quad (55)$$

ความเร่งในคอลัมน์สุดท้ายของสมการที่ (55) เขียนอยู่ในรูปของตำแหน่ง x_1 และ x_3 ได้จากการแทนค่าความเร็ว v_1 และ v_3 จากสมการที่ (54) ถึงแม้ว่าสมการความเร็วในเนื้อวัสดุของการยืดดึงในระนาบ จะแตกต่างกับการทดสอบการยืดดึงทิศทางเดียวไปบ้าง แต่การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ และการเปลี่ยนรูปของก้อนอนุภาคของไหล (Material elements) ในการยืดดึงในระนาบยังมีความคล้ายกับการทดสอบการยืดดึงทิศทางเดียว ส่วนการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของก้อนอนุภาคของไหลจะแสดงในภาพที่ 14 ที่เวลาเริ่มต้น t_0 ก้อนอนุภาคของไหลมีขนาด L_0^3 ดังแสดงในภาพที่ 14(ก) และที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ก้อนอนุภาคของไหลถูกดึงให้ยืดออกไปในทิศทาง x_3 เป็นระยะ

$$L_3 = \sqrt{2}L_0(1 + \dot{\epsilon}_0 \Delta t) \quad (56)$$

ดังแสดงในภาพที่ 14(ข) จะเห็นได้ว่าก่อนอนุภาคของไหลจะมีปริมาตรใหม่คือ $\frac{1}{2}L_0L_1L_3$ (ปริมาตรสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน) โดยมีขนาด $L_2 = L_0$ ดังเดิม ส่วนขนาด L_1 จะหดเข้าเนื่องจากกฎการอนุรักษ์มวลสำหรับวัสดุอัดตัวไม่ได้ นั่นคือ

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}L_0}{1 + \dot{\epsilon}_0 \Delta t} \quad (57)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการยืดดึงในระนาบมีจลนศาสตร์การไหล (Flow kinematics) เหมือนกับการยืดดึงในทิศทางเดียว และการยืดดึงในสองทิศทาง แต่เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุที่ถูกยืดดึงในระนาบจะเปลี่ยนจากรูปลูกบาศก์ไปเป็นรูปสี่เหลี่ยมหน้าตัดขนมเปียกปูนดังแสดงในภาพที่ 14 ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ไม่มีการหมุน (Irrotational flow) ทำให้บางครั้งเราเรียกวัดที่ถูกยืดดึงในระนาบว่า “การไหลแบบเฉือนสัมบูรณ์” (Pure shear)

เมื่อแทนค่าความเร็วทั้งสามแนวแกนในสมการที่ (53) ลงในสมการที่ (2) จะได้เทนเซอร์อัตราเครียด

$$\underline{\dot{\gamma}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} & \dot{\gamma}_{13} \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} & \dot{\gamma}_{23} \\ \dot{\gamma}_{31} & \dot{\gamma}_{32} & \dot{\gamma}_{33} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -2\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123} \quad (58)$$

แทนสมการที่ (58) ลงในสมการที่ (5) จะได้ขนาดของเทนเซอร์อัตราเครียด $\underline{\dot{\gamma}}$ ในการยืดดึงในระนาบ คือ

$$\dot{\gamma} = |\underline{\dot{\gamma}}| = + \sqrt{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123} : \begin{pmatrix} -2\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123}} = 2\dot{\epsilon}(t) \quad (59)$$

โดยของไหลเป็นวัสดุของไหลแบบนอนนิวโทเนียน จะเห็นได้ว่าการยืดดึงในระนาบ จะมีความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นไปตามสมการที่ (1) นั่นคือ

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}_{123} = -\eta(t, \dot{\gamma}) \begin{pmatrix} -2\dot{\epsilon}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\dot{\epsilon}(t) \end{pmatrix}_{123} \quad (60)$$

จากการเทียบพจน์ในแนวทแยงมุมของสมการที่ (60) แสดงให้เห็นว่า ความหนืดของของไหลชนิดนอนนิวโทเนียน $\eta(t, \dot{\gamma})$ ในการยืดดึงในระนาบ คือ

$$\eta(t, \dot{\gamma}) = -\frac{\tau_{33}}{2\dot{\epsilon}(t)} = \frac{\tau_{11}}{2\dot{\epsilon}(t)} \quad (61)$$

เมื่อ $\tau_{22} = 0$ ในการไหลแบบยืดดึงในระนาบ สมการที่ (61) แสดงถึงแรงภายในของวัสดุ ที่เกิดจากความหนืดของของไหล เมื่อ $\dot{\gamma} = 2\dot{\epsilon}(t)$ ตามสมการที่ (59) และมีเทนเซอร์ความเค้นรวม (Total stress tensor, $\underline{\underline{\pi}}$) ในการยืดดึงทิศทางเดียวดังนี้

$$\underline{\underline{\pi}} = P\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} + P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} + P & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} + P \end{pmatrix}_{123} \quad (62)$$

จากแผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของกลุ่มของไหลที่ถูกยืดดึงในระนาบในภาพที่ 15 แรงภายนอกมีแรง F ที่ก่อให้เกิดความเค้น σ_{P_1} และมีแรงพุง f ที่ไม่ยอมให้เกิดการหดตัวในแนว x_2 ที่ก่อให้เกิดความเค้น σ_{P_2} ดังนั้นสมดุลแรงแบบกึ่งสแตติก ที่มีอัตราการยืดดึงน้อย ๆ กล่าวคือ $\dot{\epsilon}(t) \rightarrow 0$ สมการที่ (62) ลดรูปเป็น

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{P_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{P_1} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \tau_{11} + P & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} + P & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} + P \end{pmatrix}_{123} \quad (63)$$

อนึ่งในของเหลว แรงพุง f เป็นแรงดูด (Vacuum) ที่ดึงวัสดุให้ติดอยู่กับผนังที่ตั้งฉากกับแกน x_2 ซึ่งมีค่าน้อยมากดังในภาพที่ 13(ก) แต่จะไม่มีแรงพุง f นี้ในการยืดดึงวัสดุดังในภาพที่ 13(ข) สมการที่ (63) เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกและแรงภายในของวัสดุ จะเห็นได้ว่า (ดูบทที่ 2 ของ Shaw & MacKnight , 2005)

$$P = -\tau_{11} \quad (64)$$

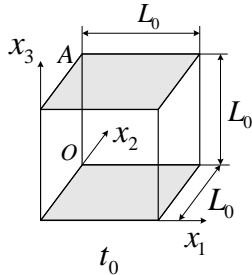
$$\tau_{22} + P = \sigma_{P_2} \quad (65)$$

$$\tau_{33} + P = \sigma_{P_1} \quad (66)$$

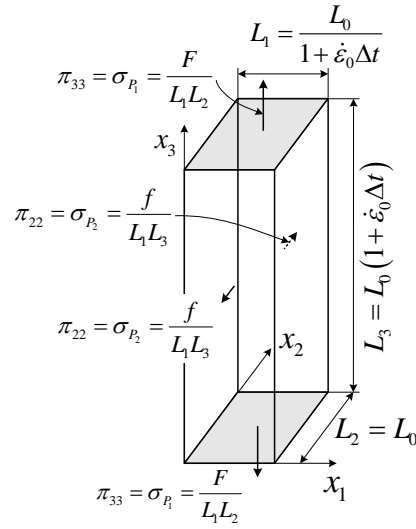
แทนค่า $P = -\tau_{11}$ ลงในสมการที่ (65) และ (66) จะได้

$$\tau_{22} - \tau_{11} = \sigma_{P_2} \quad (67)$$

$$\tau_{33} - \tau_{11} = \sigma_{P_1} \quad (68)$$



(ก)



(ข)

ภาพที่ 15 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของก้อนอนุภาคของไหลในการยืดดึงในระนาบจากปริมาตร L_0^3 ที่เวลา t_0 ในรูป (ก) เป็นปริมาตร $L_1 L_2 L_3$ ที่เวลา $t_0 + \Delta t$ ในรูป (ข) เมื่อได้รับแรงดึง F

โดยนิยามความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 (First planar elongational viscosity) คือ

$$\eta_{P_1}(t, \dot{\epsilon}) \equiv -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}(t)} = -\frac{\sigma_{P_1}}{\dot{\epsilon}(t)} \quad (69)$$

และนิยามความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 2 (Second planar elongational viscosity) คือ

$$\eta_{P_2}(t, \dot{\epsilon}) \equiv -\frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{\dot{\epsilon}(t)} = -\frac{\sigma_{P_2}}{\dot{\epsilon}(t)} \quad (70)$$

และมีค่าโดยนิยามมอดุลัสยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 (First planar elongational modulus) คือ

$$E_{P_1}(t, \epsilon) \equiv -\frac{\tau_{33} - \tau_{11}}{\epsilon(t)} = -\frac{\sigma_{P_1}}{\epsilon(t)} \quad (71)$$

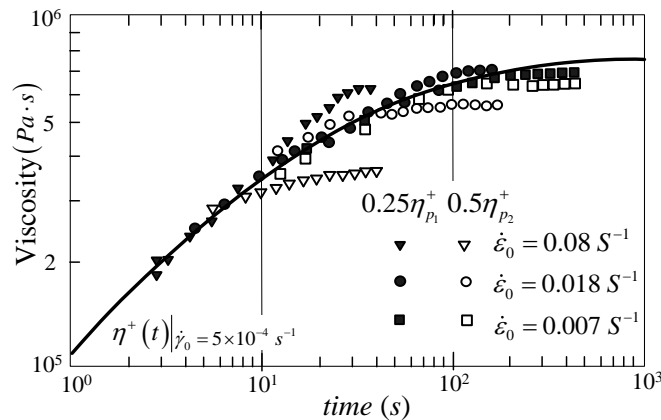
และนิยามมอดุลัสยืดดึงในระนาบลำดับที่ 2 (Second planar elongational modulus) คือ

$$E_{P_2}(t, \varepsilon) \equiv -\frac{\tau_{22} - \tau_{11}}{\varepsilon(t)} = -\frac{\sigma_{P_2}}{\varepsilon(t)} \quad (72)$$

โดยทั่วไปแล้วถ้าวัสดุมีสมบัติยืดหยุ่น (Purely elastic) และยืดหยุ่นสูง ๆ (Hyper elastic) ที่เป็นเนื้อเดียว (Homogeneous) โมดูลัสยืดดึงจะไม่ขึ้นกับอัตรายืดดึง $\dot{\varepsilon}(t)$ และสมการที่ (71) และ (72) ควรจะมีค่าเท่ากัน (ดูหัวข้อ 2.6 ของ Menard, 2008) เนื่องจากในการทดสอบสมบัติรีโอโลยี จะกระทำที่อัตรายืดดึงคงตัว $\dot{\varepsilon}_0$ ใด ๆ จากสมการที่ (60) แทนค่า $\tau_{11}(t, \dot{\varepsilon}_0) = 2\eta(t, \dot{\varepsilon}_0)\dot{\varepsilon}_0$, $\tau_{22} = 0$ และ $\tau_{33}(t, \dot{\varepsilon}_0) = -2\eta(t, \dot{\varepsilon}_0)\dot{\varepsilon}_0$ ลงในสมการที่ (69) และ (70) ที่ลิมิต $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$ จะได้

$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_{P_1}(t, \dot{\varepsilon}_0) = \eta_{P_1}(t) = 4\eta(t) \quad (73)$$

$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_{P_2}(t, \dot{\varepsilon}_0) = \eta_{P_2}(t) = 2\eta(t) \quad (74)$$



ภาพที่ 16 แสดงความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 $\eta_{P_1}^+(t, \dot{\varepsilon}_0)$ และ 2 $\eta_{P_2}^+(t, \dot{\varepsilon}_0)$ จากการทดสอบการเกิดความเค้นยืดดึงในระนาบของพอลิไอโซบิวทาลีน (Polyisobutylene) ที่อุณหภูมิ $T = 23^\circ C$ ที่ลิมิต $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$ จะมีค่าเป็น 4 เท่า และ 2 เท่า ของความหนืดเฉือนจากการทดสอบการเกิดความเค้นเฉือน $\eta^+(t)$ (ดึงข้อมูลมาจาก ภาพที่ 3.5-5 ของ Bird et al., 1987)

เมื่อ $\dot{\gamma}_0 = 2\dot{\varepsilon}_0$ ตามสมการที่ (59) สมการที่ (73) และ (74) สอดคล้องกับผลการทดสอบการเกิดความเค้นยืดดึงในระนาบของพอลิไอโซบิวทาลีน (Polyisobutylene) ที่อุณหภูมิ $T = 23^\circ C$ ดังแสดงในภาพที่ 16 ที่ลิมิต $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$ ความหนืดยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 $\eta_{P_1}^+(t, \dot{\varepsilon}_0)$ และ 2 $\eta_{P_2}^+(t, \dot{\varepsilon}_0)$ ในการทดสอบจะมีค่าเป็น 4 เท่า และ 2 เท่า ของความหนืดเฉือนจากการทดสอบการเกิดความเค้นเฉือน $\eta^+(t)$



$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_{P_1}^+(t, \dot{\varepsilon}_0) = \eta_{P_1}^+(t) = 4\eta^+(t) \quad (75)$$

$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_{P_2}^+(t, \dot{\varepsilon}_0) = \eta_{P_2}^+(t) = 2\eta^+(t) \quad (76)$$

และสมการที่ (73) และ (74) ยังได้รับการยืนยันสำหรับการทดสอบยึดติดคงตัว ที่ลิมิต $\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$ ณ. อุณหภูมิ T ใดๆ ในการทดสอบความเหนียวยึดติดในระนาบลำดับที่ 1 $\eta_{P_1}(\dot{\varepsilon}_0)$ และลำดับที่ 2 $\eta_{P_2}(\dot{\varepsilon}_0)$ จะมีความสัมพันธ์กับความเหนียวที่การเฉือนเป็นศูนย์ η_0 ดังนี้ (ดูหน้า 161-162 ของ Morrison, 2001)

$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_{P_1}(\dot{\varepsilon}_0) = 4\eta_0 \quad (77)$$

$$\lim_{\dot{\varepsilon}_0 \rightarrow 0} \eta_{P_2}(\dot{\varepsilon}_0) = 2\eta_0 \quad (78)$$

ในทำนองเดียวกันจากสมการที่ (71) และ (72) เมื่อแทนค่า $\tau_{11}(t, \varepsilon_0) = 2G(t, \dot{\gamma})\varepsilon_0$, $\tau_{22} = 0$ และ $\tau_{33}(t, \varepsilon_0) = -2G(t, \dot{\gamma})\varepsilon_0$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า มอดุลัสยึดติดในระนาบลำดับที่ 1 $E_{P_1}(t, \varepsilon_0)$ มีค่าเป็น 4 เท่า ของมอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้น $G(t)$ และมอดุลัสยึดติดในระนาบลำดับที่ 2 $E_{P_2}(t, \varepsilon_0)$ มีค่าเป็น 2 เท่า ของมอดุลัสยืดหยุ่นเชิงเส้น $G(t)$ เมื่อ $\varepsilon_0 \rightarrow 0$

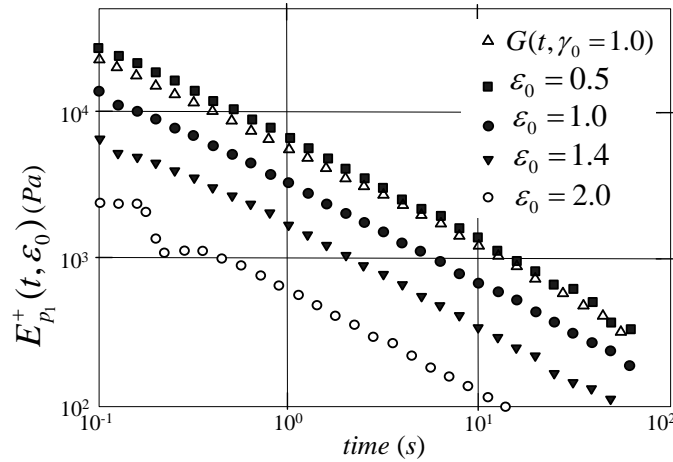
$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} E_{P_1}(t, \varepsilon_0) = E_{P_1}(t) = 4G(t) \quad (79)$$

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} E_{P_2}(t, \varepsilon_0) = E_{P_2}(t) = 2G(t) \quad (80)$$

และในทำนองเดียวกันกับการไหลแบบเฉือน ในสมการที่ (10) มอดุลัสยึดติดในระนาบลำดับที่ 1 $E_{P_1}(t, \varepsilon_0)$ สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น (Khan & Larson, 1991)

$$E_{P_1}(t, \varepsilon_0) = G(t)h_\varepsilon(\varepsilon_0) \quad (81)$$

เมื่อ $G(t)$ คือมอดุลัสผ่อนคลายเชิงเส้น และ $h_\varepsilon(\varepsilon_0)$ คือฟังก์ชันหน่วงยึดติด (Damping function) แทนสมการที่ (81) ลงในสมการที่ (79) จะได้



ภาพที่ 17 แสดงมอดุลัสยืดดึงในระนาบลำดับที่ 1 $E_{P_1}(t, \epsilon_0)$ ของ LLDPE ที่ ϵ_0 ต่าง ๆ ที่อุณหภูมิ $T = 160^\circ C$ โดยกำหนดให้ $h_\epsilon(\epsilon_0) = 1$ เมื่อ $\epsilon_0 \rightarrow 0$ ค่า $E_{P_1}(t, \epsilon_0)$ จะเข้าใกล้ $G(t)$ ที่ $\dot{\gamma}_0 = 2\dot{\epsilon}_0$ (Khan & Larson, 1991)

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} E_{P_1}(t, \epsilon_0) = h_\epsilon(\epsilon_0)G(t) \tag{82}$$

ในภาพที่ 17 เป็นการทดสอบการคลายความเค้นยืดดึงในระนาบที่ ϵ_0 ต่าง ๆ เปรียบเทียบกับ $G(t)$ ของ LLDPE โดยกำหนดให้ $h_\epsilon(\epsilon_0) = 1$ ที่อุณหภูมิ $T = 160^\circ C$ เมื่อ $\epsilon_0 \rightarrow 0$ ค่า $E_{P_1}(t, \epsilon_0)$ จะเข้าใกล้ $G(t)$ ซึ่งเป็นไปตามสมการที่ (82)

บทสรุป

การสมมูลแรงจากก้อนของไหล (Fluid element) จากแผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของกลุ่มของไหลที่อยู่ระหว่างการทดสอบดึงยืดทิศทางเดียวแบบคงตัวพบว่า อัตราการเสียรูปของวัสดุในการดึงยืดทิศทางเดียว จะเป็นเอ็กซ์โพเนนเชียลกับเวลาที่ใช้ยืด นอกจากนี้การสมมูลแรงจากก้อนของไหล (Fluid element) ในแผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) ของกลุ่มของไหลที่อยู่ระหว่างการทดสอบการยืดดึง ทำให้เข้าใจความสัมพันธ์ของแรงดึงกับค่าความหนืดยืดดึง (Elongational Viscosity) $\eta_E(t, \dot{\epsilon})$ และค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของยังส์ (Young's elastic modulus) $E(t, \epsilon)$ ในการไหลยืดดึงทิศทางเดียว และแสดงให้เห็นว่าทำไมความหนืดยืดดึงทิศทางเดียว (Elongational Viscosity) $\eta_E(t, \dot{\epsilon})$ ที่ลิมิต $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ จึงมีค่าเป็น 3 เท่าของความหนืดที่การเฉือนเป็นศูนย์ η_0 ในทำนองเดียวกันยังอธิบายที่มาของนิยามฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงสองทิศทาง $\eta_B(t, \dot{\epsilon}_B)$ และ $E_B(t, \epsilon_B)$ และฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงในระนาบด้วย $\eta_{P_1}(t, \dot{\epsilon}), \eta_{P_2}(t, \dot{\epsilon})$ และ $E_{P_1}(t, \epsilon), E_{P_2}(t, \epsilon)$ และพบว่า การยืดดึงในระนาบมีจลนศาสตร์การไหล (Flow kinematics) ที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบที่ไม่มีการหมุน (Irrotational flow) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า “การเฉือนสัมบูรณ์” ในขณะที่จลนศาสตร์การไหลของการยืดดึงทิศทางเดียวและสองทิศทาง เป็นการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่มีการหมุน (Rotational flow) อีกทั้งยังได้



แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันทางรีโอโลยีของการไหลยืดดึงสองทิศทางและในระนาบกับความหนืดที่การเฉือนเป็นศูนย์ η_0 ซึ่งพบว่าค่าความหนืดยืดดึงสองทิศทาง (Biaxial elongational Viscosity) $\eta_B(t, \epsilon_B)$ ที่ลิมิต $\dot{\epsilon}_B \rightarrow 0$ มีค่าเป็น 6 เท่าของความหนืดเฉือน $\eta(t)$ ในขณะที่ความหนืดในการไหลยืดดึงในระนาบที่ 1 และ 2 $\eta_{P1}(t, \dot{\epsilon})$ และ $\eta_{P2}(t, \dot{\epsilon})$ มีค่าเป็น 4 เท่าและ 2 เท่าของความหนืดเฉือน $\eta(t)$ ตามลำดับ โดยตัวแปรทั้งหมดนี้ถูกกำหนดโดยคณะกรรมการที่แต่งตั้งจากสมาคมรีโอโลยีแห่งสหรัฐอเมริกา (Society of Rheology, USA)

เอกสารอ้างอิง

Ad Hoc Committee on Official Nomenclature and Symbols (2013). Official symbols and nomenclature of the society of rheology. *Journal of Rheology*, 57, 1047.

ASTM D412-98a (2003). "Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers-Tension," ASTM International, West Conshohocken, PA, United States.

Barroso, V. C., Ribeiro, S. P. and Maia, J. M. (2003). Stress relaxation after a step strain in uniaxial extension of polyisobutylene and polyethylene, *Rheologica Acta*, 42(4), 345–354.

Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., Klingenberg, D.J. (2015), *Introductory Transport Phenomena*, Wiley.

Bird, R.B., Armstrong R.C., and Hassager O. (1987). Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York.

Brimmo, A.T., and M.A. Qasaimeh (2017). Stagnation point flows in analytical chemistry and life sciences, *Royal Society of Chemistry Advances*, 7, 51206.

Callister W.D., Jr. and Rethwisch, D.G. (2015). Fundamentals of Materials Science and Engineering, An Integrated Approach, 5th ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.

Cengel, Y. A. and J. M. Cimbala (2006). *Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications*, International Edition, McGraw Hill, New York.



- Dealy, John M. (1984). Official Nomenclature for Material Functions Describing the Response of a Viscoelastic Fluid to Various Shearing and Extensional Deformations. *Journal of Rheology*, 28, 181.
- Dealy, John M. (1995). Official Nomenclature for Material Functions Describing the Response of a Viscoelastic Fluid to Various Shearing and Extensional Deformations. *Journal of Rheology*, 39, 253.
- Khan, S. A. & Larson, R. G. (1987). Comparison of Simple Constitutive Equations for Polymer Melts in Shear and Biaxial and Uniaxial Extensions. *Journal of Rheology*, 31(3), 207–234. doi: 10.1122/1.549922
- Khan, S. A. & Larson, R. G. (1990). Erratum: Comparison of simple constitutive equations for polymer melts in shear, and biaxial and uniaxial extensions [J. Rheol. 31, 207 (1987)]. *Journal of Rheology*, 34(1), 137–138. doi: 10.1122/1.550119
- Khan, S. A. & Larson, R. G. (1991). Step planar extension of polymer melts using a lubricated channel. *Rheologica Acta*, 30(1), 1-6. doi: 10.1007/bf00366788
- Kolitawong, C. (2003), A Sliding Plate Rheometer for Large Deformation Viscoelastic Measurements, *The 17th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand*, Prachinburi, Thailand, (October 15-17, 2003), pp.841-844, MM036.
- Kolitawong, C. (2018). Rheology Property Testing of Shear Flow, *Journal of Science Ladkrabang*, 27(2), 44-64. ISSN 0857-9512. (in Thai)
- Kolitawong, C. (2019a). Rheology Properties of Elongational Flow Experiments, *The Journal of Applied Science*, 18(2), pp.1-19. ISSN 2586-9663. doi:10.14416/j.appsci.2019.09.002 (in Thai).
- Kolitawong, C. (2019b), Rheology of Generalized Newtonian Fluids, *KKU Science Journal*, 47(3), 392-401. (in Thai)
- Kolitawong, C. (2020), Rheology behavior identification of materials from oscillatory shear, *The Journal of Industrial Technology*, 16(3), 96-115. (in Thai)



Kolitawong, C. and A.J. Giacomini (2009). Sliding Plate Rheometer and its Applications, *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 19(1), pp. 109-115. ISSN: 2465-4698.

Menard, Hevin P (2008), *Dynamic Mechanical Analysis, A Practical Introduction*, 2nd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA.

Messner, J., (1985). Experimental Aspects in Polymer Melt Elongational Rheometry. *Chemical Engineering Communications*, 33, 159-180.

Morrison, F. A. (2001). *Understanding Rheology*, Oxford University Press, New York.

Munson, B. R., D. F. Young, and T. H. Okiishi (2002). *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 4th ed, John Wiley and Sons.

Münstedt, H., (1980). Dependence of the Elongational Behavior of Polystyrene Melts on Molecular Weight and Molecular Weight Distribution. *J. Rheol.*, 24, 847-867.

Pritchard, Philip J. (2011). *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics*, 8th ed., John Wiley & Sons, Inc.

Song, Y., Q. Zheng, and Z. Wang (2007), Equibiaxial extensional flow of wheat gluten plasticized with glycerol, *Food Hydrocolloids*, 21, 1290-1295.

Soskey, P. R. and Winter, H. H. (1985). Equibiaxial Extension of Two Polymer Melts: Polystyrene and Low Density Polyethylene. *Journal of Rheology*, 29(5), 493-517.

Sharma, R.K., K. Furusawa, A. Fukui, and N. Sasaki (2014). Effects of a flow field on amyloid fibrillogenesis in a B-lactoglobulin solution, *International Journal of Biological Macromolecules*, 70, 490-497.

Shaw, M.T, and MacKnight (2005), W.J., *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, 3rd Ed., Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Tanner, R.I. (2002). *Engineering Rheology*, 2nd. ed., Oxford Engineering Science Series, Oxford University Press.



Taylor, G.I. (1934). The Formation of Emulsions in Definable Fields of Flow, *Proc. R. Soc. (Lond.) A*, 146, 501–523.

Trouton, F. T. (1906). On the Coefficient of Viscous Traction and Its Relation to that of Viscosity, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 77(519), 426–440.

Wangchai, S (2005). Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural Rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation, Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Thailand. (in Thai)

Wangchai, S., C. Kolutawong, and A. Chaikittiratna (2008). Finite Element Simulation for Heat Built-up in Vulcanized Natural Rubber Subjected to Dynamic Load, *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 18(3), pp.49-61. ISSN: 2465-4698 (in Thai)

Wangchai, S., C. Kolutawong, and A. Chaikittiratna (2011), Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation, *Journal of King Mongkut's University of Technology North Bangkok*, 21(1), pp.754-762. ISSN: 2465-4698. (in Thai)

White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics*, 4th ed., McGraw Hill, New York.