

จลศาสตร์และการเสียรูปของวัสดุ

Kinematics and Deformations of a Continuum Material

ชาญยุทธ์ โกลิตะวงษ์

Chanyut Kolitawong*

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

Department of Mechanical and Aerospace Engineering,

Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok

Received : 26 November 2018

Revised : 11 June 2019

Accepted : 19 August 2019

บทคัดย่อ

ด้วยแนวคิดทางกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Continuum mechanics) ที่ว่าเราจะไม่มองสสารในระดับอะตอมแต่จะมองสสารที่เป็นกลุ่มก้อนของวัสดุ ดังนั้นการศึกษาระบบการเสียรูปของวัสดุ (เนื่องจากแรงภายนอกมากกระทำ) เป็นวิทยาศาสตร์ประยุกต์ที่ถูกนำมาใช้งานทางด้านวัสดุวิศวกรรมและวิศวกรรมเครื่องกลและเคมี เนื่องจากแรงจากภายนอกมากกระทำจะทำให้เกิดการเสียรูปเชิงเส้น (Linear deformation) การเสียรูปเชิงมุม (Angular deformation) การเคลื่อนที่ (Linear translation) และการหมุน (Rotation) ไปพร้อม ๆ กัน ในบทความนี้อธิบายถึงการสืบหาการเสียรูปของวัสดุไปข้างหน้าในเวลาปัจจุบัน t ใด ๆ โดยอ้างอิงกับรูปทรงที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0 = 0$ ที่ใช้กับวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body) ของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) วัสดุไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic material) หรือวัสดุหนืดยืดหยุ่น (Viscoelastic material) เมื่อเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ สามารถแยกตัวประกอบออกเป็น การเสียรูปจากการยืด ($\underline{\underline{U}}$ หรือ $\underline{\underline{V}}$) และการเสียรูปจากการหมุน $\underline{\underline{R}}$ ได้ ในตอนท้ายของบทความได้มีการพูดถึงอัตราการเสียรูปของวัสดุซึ่งโดยมากจะมีผลกับวัสดุที่เป็นของเหลว แต่จะไม่ส่งผลต่อการเสียรูปของวัตถุแข็งเกร็ง

คำสำคัญ : กลศาสตร์ความต่อเนื่อง, จลศาสตร์, เกรเดียนต์การเสียรูป, อัตราการเสียรูป

Abstract

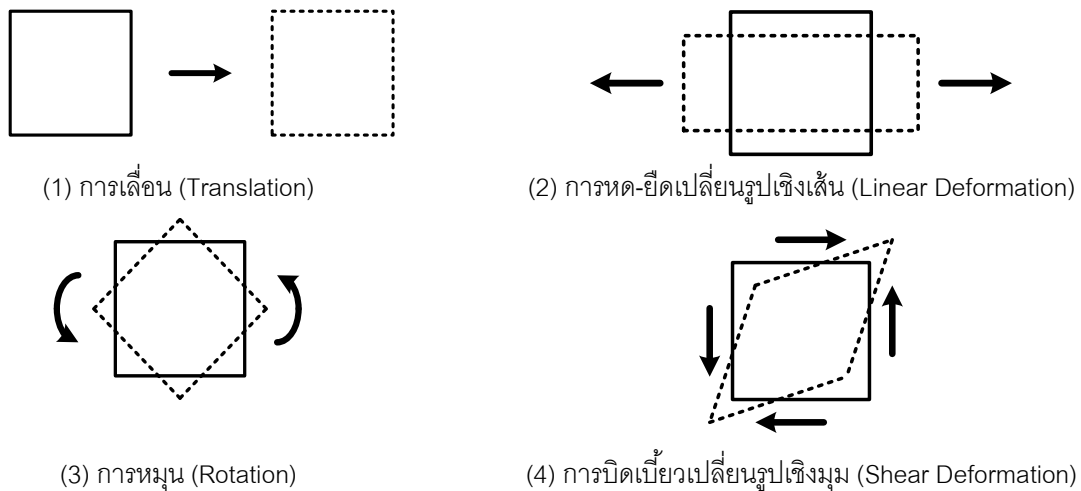
Continuum mechanics is an applied science with the wide applications in material, mechanical and chemical engineering. Kinematics is a science study of material deformations (from external forces) and movements. Those deformations are comprised of linear and angular deformations while movements come from translations and rotations. This article presents the procedures of determining the material deformation at current time t from the undeformed shape at initial time $t_0 = 0$. This technique is commonly used in rigid bodies, elastic solids, hyperelastic materials, including viscoelastic materials. The deformation gradient tensor $\underline{\underline{F}}$ can be decomposed to right stretch tensor $\underline{\underline{U}}$ (or left stretch tensor $\underline{\underline{V}}$) and rotation tensor $\underline{\underline{R}}$. The rate of deformation has the more profound effects in liquids than in solids.

Keywords : continuum mechanics, kinematics, deformation gradient, rate of deformation

*Corresponding author. E-mail : chanyut.k@eng.kmutnb.ac.th

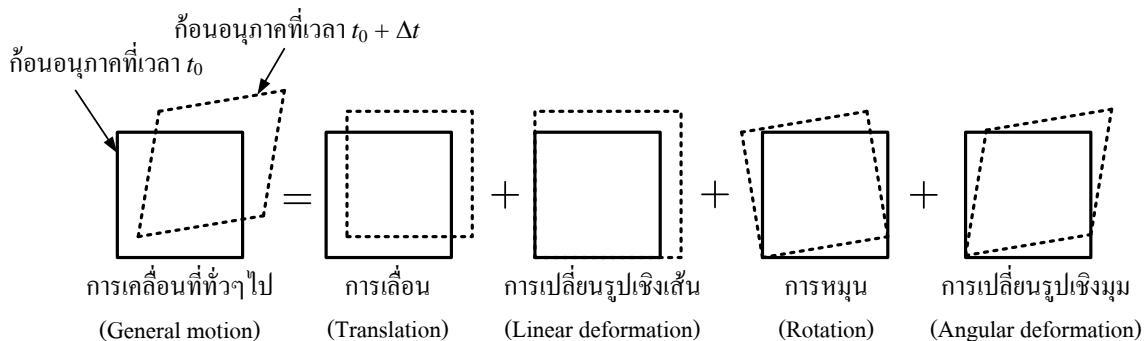
บทนำ

จลนศาสตร์ของวัสดุ (Kinematics of materials) เป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ของกลุ่มอนุภาคของวัสดุเช่น ความเร็ว ความเร่ง และระยะจัดโดยไม่มีแรงเข้ามาเกี่ยวข้อง การเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกลุ่มก้อนอนุภาคของวัสดุ (Kinematic Descriptions) แบ่งออกเป็น 4 รูปแบบคือ (1) การเลื่อน (Translation) (2) การหด-ยืดเปลี่ยนรูปเชิงเส้น (Linear deformation) (3) การหมุน (Rotation) และ (4) การบิดเบี้ยวเปลี่ยนรูปเชิงมุม (Shear deformation) ดังแสดงในภาพที่ 1 (Cengel & Cimbala, 2006) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ 2 รูปแบบคือ การเลื่อนและการหมุน และเป็น การเปลี่ยนแปลงรูปร่างอีก 2 แบบคือ การหด-ยืดเปลี่ยนรูปเชิงเส้นและการบิดเบี้ยวเปลี่ยนรูปเชิงมุม โดยทั่วไปแล้วการเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกลุ่มก้อนอนุภาคเกิดจากการเลื่อน การยืด การหมุน และการบิดเบี้ยวแบบเชื่อมไปพร้อม ๆ กันดังแสดงใน ภาพที่ 2 (Munson *et al.*, 2002)



ภาพที่ 1 แสดงการเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกลุ่มก้อนอนุภาคของวัสดุซึ่งแบ่งออกเป็น 4 รูปแบบคือ

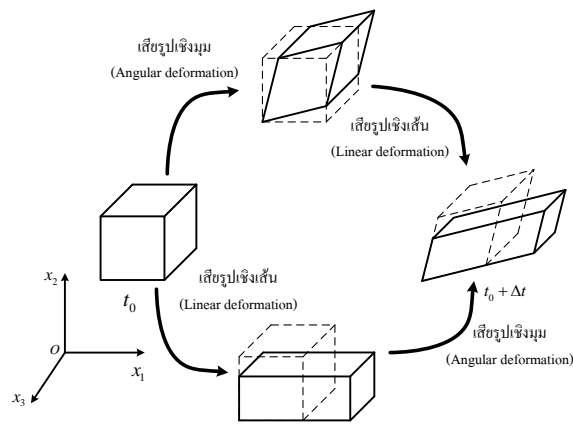
- (1) การเลื่อน (Translation) (2) การหด-ยืดเปลี่ยนรูปเชิงเส้น (Linear deformation) (3) การหมุน (Rotation) และ (4) การบิดเบี้ยวเปลี่ยนรูปเชิงมุม (Shear deformation)



ภาพที่ 2 แสดงการเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของกลุ่มก้อนอนุภาคของวัสดุที่เกิดจากการเลื่อน การหด-ยืดเปลี่ยนรูปเชิงเส้น การหมุน และการบิดเบี้ยวเปลี่ยนรูปเชิงมุมไปพร้อม ๆ กัน

โดยทั่วไปแล้วการศึกษาการเสียรูปของวัสดุไม่จำเป็นจะต้องพิจารณาถึงระดับอะตอมแต่จะพิจารณาว่าวัสดุเป็นกลุ่มก้อนอนุภาคที่มีขนาดเล็ก คำว่าขนาดเล็กในที่นี้หมายถึงปริมาตรประมาณ 10^{-9} ลูกบาศก์มิลลิเมตร ที่ความดันบรรยากาศ (White, 2010) ยกตัวอย่างเช่น กลุ่มก้อนอนุภาคของอากาศที่มีปริมาตรขนาด 10^{-9} ลูกบาศก์มิลลิเมตร จะประกอบไปด้วยโมเลกุลของอากาศประมาณ 3×10^7 โมเลกุลเลยทีเดียว ซึ่งในกรณีนี้กลุ่มก้อนอนุภาคของอากาศจัดได้ว่ามีสมบัติความต่อเนื่อง (Continuum property) และเมื่อนำแนวคิดนี้มาใช้ทางกลศาสตร์ (Mechanics) จึงเรียกว่ากลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Continuum mechanics) แต่อย่างไรก็ตามการพิจารณากลุ่มก้อนอนุภาคของวัสดุว่ามีสมบัติความต่อเนื่องอาจจะไม่สามารถใช้ได้กับบางสถานการณ์และจำเป็นต้องพิจารณาวัสดุเป็นอะตอมที่วางตัวอย่างไม่ต่อเนื่อง นั่นคือ วางตัวเฉพาะที่จุดแลตทิซต่าง ๆ เท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่นในวัสดุ หากความยาวคลื่นสั้นกว่าระยะห่างระหว่างอะตอม การพิจารณาวัสดุเป็นตัวกลางต่อเนื่องจะไม่ถูกต้องอีกต่อไป

กลศาสตร์ (Mechanics) เป็นการศึกษากระบวนการเสียรูปของวัสดุเนื่องจากแรงภายนอก ด้วยแนวคิดทางกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Continuum mechanics) เราจะไม่มองสสารในระดับอะตอมแต่จะมองสสารที่เป็นกลุ่มก้อนของวัสดุที่มีสมบัติที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องกันไปตลอดทั้งก้อนวัสดุ ดังนั้นเมื่อก้อนวัสดุถูกแรงจากภายนอกมากจะทำให้เกิดการเสียรูปเชิงเส้น (Linear deformation) การเสียรูปเชิงมุม (Angular deformation) ไปพร้อม ๆ กันดังแสดงในภาพที่ 3 แสดงก้อนอนุภาคของวัสดุที่มีการเคลื่อนที่ทำให้ก้อนอนุภาคมีการเสียรูปเชิงเส้น เช่นการยืดดึง และการเสียรูปเชิงมุม เช่นการบิดเบี้ยวไปพร้อม ๆ กัน โดยก้อนอนุภาคที่เวลา t_0 ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ในขณะที่ก้อนอนุภาคเดิมที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิม



ภาพที่ 3 แสดงก้อนอนุภาคของวัสดุที่มีการเสียรูปเชิงเส้น เช่นการยืดดึงและการเสียรูปเชิงมุม เช่นการบิดเบี้ยวไปพร้อม ๆ กัน โดยก้อนอนุภาคที่เวลา t_0 ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ในขณะที่ก้อนอนุภาคเดิมที่เวลา $t_0 + \Delta t$ เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิม

วัตถุประสงค์ของบทความนี้ต้องการที่จะกล่าวถึงจลนศาสตร์และการเสียรูปของวัสดุที่มีการอ้างอิงรูปทรงที่เวลาคงที่ (Reference configuration at fixed reference time) ที่ t_0 ซึ่งโดยมากจะใช้ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมของกระบวนการเสียรูปของวัสดุที่ทราบขนาดของวัสดุที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0$ เช่นการเสียรูปของของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) วัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body) วัสดุไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic material) หรือวัสดุหนืดยืดหยุ่น (Viscoelastic material) บางกระบวนการทดสอบ เช่นการทดสอบการดึงยึดของเหลวหนืดยืดหยุ่น เป็นต้น ส่วนมากจะวัดโดยใช้เวลาและตำแหน่งในอดีตเป็นเวลาและ

ตำแหน่งอ้างอิง (Configuration in the past as a reference configuration) แล้วคำนวณหาความเครียดของวัสดุไปข้างหน้า (Lai et al., 2010) ในทางปฏิบัติจะยึดเอาขนาดที่เวลา $t = t_0 = 0$ เป็นขนาดและเวลาอ้างอิง

การเสี้ยวรูป

พิจารณาแกนเฉื่อยหรือแกนหลัก (Inertia frame or fixed frame) ซึ่งเป็นพิกัดเชิงพื้นที่ของออยเลอร์ (Spatial coordinate in Euler description) เป็นแกนสมมุติที่เวลา $t = t_0$ ใด ๆ ที่ยึดติดอยู่กับที่มีสเกลวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกัน (x_1, x_2, x_3) ส่วนแกนเคลื่อนที่จะเป็นแกนสมมุติที่ยึดติดอยู่กับอนุภาคของวัตถุที่มีการเลื่อนและหมุนไปกับก่อนอนุภาคนั้น (Translated and rotated or moving frame) ซึ่งเป็นมุมมองของลากรางค์ (Lagrange description) มีสเกลวัดระยะทางไปใน 3 ทิศทางที่ตั้งฉากกัน เช่นเดียวกัน ภาพที่ 4 แสดงผู้สังเกตการณ์บนจุดกำเนิดของระบบแกนหลักที่จุด O (Fixed frame) บนแกน (x_1, x_2, x_3) แสดงทิศทางที่ตั้งฉากกันและมีผู้สังเกตการณ์อีกคนอยู่ที่จุด P ของระบบแกนเคลื่อนที่ (Moving frame) ถือนาฬิกาจับเวลาบอกเวลา t บนแกน (X_1, X_2, X_3) ที่กำลังเลื่อนและหมุนไปอย่างอิสระพร้อม ๆ กัน (Translating and co-rotating)

พิจารณาอนุภาคของวัสดุที่ตำแหน่ง P บนก่อนอนุภาคในภาพที่ 4 ที่มีเวกเตอร์ \bar{X} แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค P ที่เวลาอ้างอิง t_0 ซึ่งใช้เป็นเวลาอ้างอิง ในเวลา t ต่อมาวัตถุได้เคลื่อนที่ไปอนุภาคของวัสดุ P ได้เคลื่อนที่มายู่ที่ตำแหน่ง \bar{x} โดยที่เวลา $t = t_0$ เวกเตอร์ \bar{X} แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(t_0)$ คือ (Irgens, 2008)

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{1}$$

ตัวเลข 123 ที่ห้อยอยู่กับวงเล็บแสดงถึงแกนที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ และมีขนาดที่วัดจาก $P(t_0)$ ถึง $Q(t_0)$ คือ

$$d\bar{X} = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{2}$$

ในขณะที่เวลา t ใด ๆ เวกเตอร์ \bar{x} แสดงตำแหน่งที่วัดจากจุด O ไปหาอนุภาค $P(t)$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{3}$$

และมีขนาดที่วัดจาก $P(t)$ ถึง $Q(t)$ คือ

$$d\bar{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{4}$$

ถ้าการเสียรูปมีระยะจำกัด (Finite strain) เราสามารถคิดว่าเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง \bar{x} เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นกับเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง \bar{X} ที่เวลาอ้างอิงคงที่ t_0 กล่าวคือ $\bar{x}(X_1, X_2, X_3)$ ดังนั้นจากกฎลูกโซ่เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่างระหว่างอนุภาคตำแหน่ง $P(t_0)$ และ $Q(t_0)$ และระยะห่างระหว่างอนุภาคตำแหน่ง $P(t)$ และ $Q(t)$ คือ

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \tag{5}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} dX_3 \tag{6}$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} dX_3 \tag{7}$$

จากสมการที่ (5)- (7) ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$d\bar{x} = \underline{\underline{F}} \cdot d\bar{X} \tag{8}$$

เมื่อเทนเซอร์ $\underline{\underline{F}}$ คือเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป (Deformation gradient tensor) นิยามโดย (Jog, 2015)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}_{123} \tag{9}$$

และมีอินเวอร์ตของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป (Inverse of deformation gradient tensor) นิยามโดย

$$d\bar{X} = \underline{\underline{F}}^{-1} d\bar{x} \tag{10}$$

โดย $\underline{\underline{F}}^{-1}$ อินเวอร์ตของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูปคือ

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{123} \tag{11}$$

ซึ่งเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ และอินเวอร์ตของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}^{-1}$ เป็นฟังก์ชันตั้งฉาก (Orthogonal tensor) ซึ่งกันและกันกล่าวคือ

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\delta}} \tag{12}$$

เมื่อ $\underline{\underline{\delta}}$ คือเทนเซอร์หนึ่งหน่วยนิยามโดย

$$\underline{\underline{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{123} \tag{13}$$

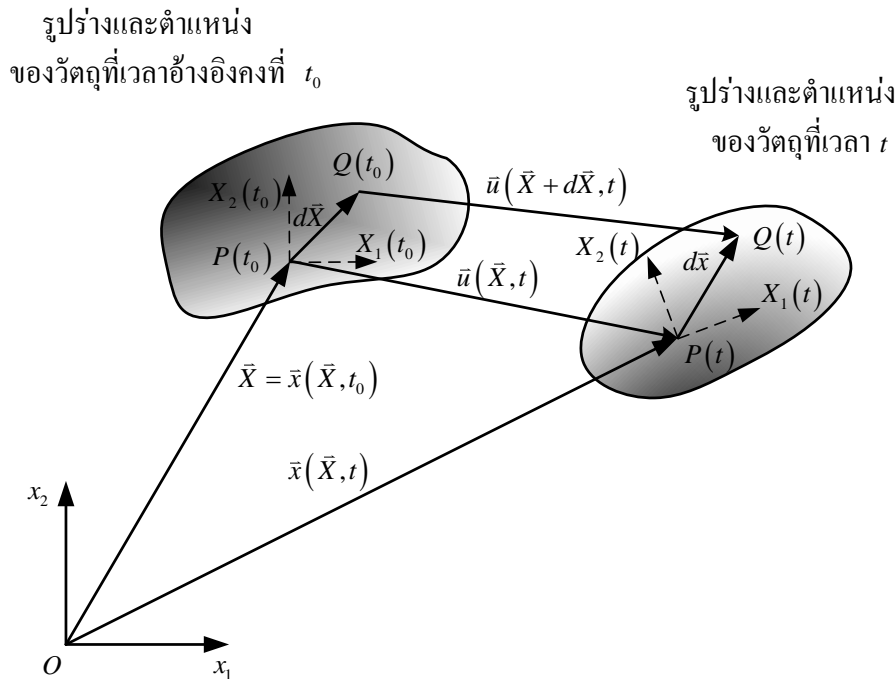
จากสมการที่ (8) จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ และอินเวอร์ตของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}^{-1}$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่แสดงการเสียรูปในช่วงระยะเวลา t_0 และ t ดังนั้นเราสามารถใช้นิพจน์ทั้งสองนี้สืบหาความเครียดเนื่องจากการเสียรูปของวัสดุได้ตลอดช่วงระยะเวลา t_0 และ t และที่เวลาอ้างอิง t_0

$$\underline{\underline{F}}(t_0) = \underline{\underline{\delta}} \tag{14}$$

และ

$$J = \det \underline{\underline{F}} > 0 \tag{15}$$

เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ ในสมการที่ (15) จะเป็นค่าสเกลาร์ที่เกิดจากการคูณกันของเวกเตอร์ 3 ตัวที่ตั้งฉากกัน ซึ่งในที่นี้คือปริมาตรของกลุ่มก้อนวัสดุที่เวลา t ใด ๆ เปรียบเทียบกับปริมาตรของกลุ่มก้อนวัสดุก่อนการเสียรูปที่เวลา t_0 ดังนั้นจึงมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ (ดูบทที่ 13 ของ Rudnicki, 2015) และถ้าวัสดุไม่สามารถกดอัดได้ (Incompressible materials) ดีเทอร์มิแนนต์ของเกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ จะมีค่าเท่ากับหนึ่ง ในที่นี้เทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ จะแสดงการเสียรูปของวัสดุที่ค่อนข้างจะมาก (Large deformation or finite strain deformation) และทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนถ่าย (Transformation tensor) จากพิกัดวัสดุ (Material or Lagrange descriptions) ไปเป็นพิกัดเชิงพื้นที่ (Spatial or Euler descriptions) จึงส่งผลให้ความเครียดและความเค้นไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งจะแสดงในหัวข้อถัดไป



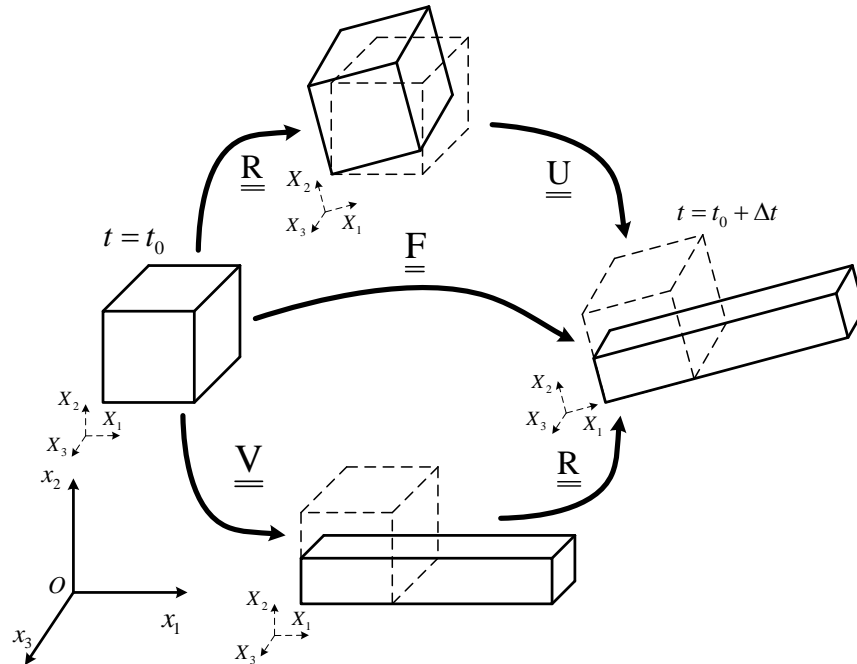
ภาพที่ 4 แสดงการเสียรูปของวัสดุจากขนาด $d\bar{X}$ ที่เวลาอ้างอิงคงที่ t_0 ไปเป็นขนาด $d\bar{x}$ ที่เวลา t โดยวัสดุที่ตำแหน่ง $P(t_0)-Q(t_0)$ เคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่ง $P(t)-Q(t)$

ความเครียด

เนื่องจากเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ และอินเวอร์ตของเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}^{-1}$ จะเกิดจากการหด-ยืด เปลี่ยนรูปเชิงเส้น (Linear deformation) รวมกับการหมุน (Rotation) ไปพร้อม ๆ กัน ดังนั้นเพื่อแยกการหด-ยืดเปลี่ยนรูปเชิงเส้นและการหมุนของก้อนอนุภาควัสดุออกจากกัน เราจำเป็นต้องใช้เทคนิคการแยกเชิงขั้ว (Polar decomposition technique) ซึ่งทฤษฎีการแยกเชิงขั้วกล่าวว่าสำหรับเทนเซอร์ $\underline{\underline{F}}$ ใด ๆ ที่สามารถหา $\underline{\underline{F}}^{-1}$ ได้จะสามารถแยกเทนเซอร์ออกได้เป็นสองชนิดได้ นั่นคือ (Morrison, 2001; Lai *et al.*, 2010; Astarita & Marrucci, 1974)

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}} \tag{16}$$

โดย $\underline{\underline{R}}$ เป็นเทนเซอร์การหมุน (Rotation tensor) ที่มีสมบัติความตั้งฉาก (Orthogonal tensor) ดังนั้น (Itskov, 2014)



ภาพที่ 5 แสดงการแยกเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป- $\underline{\underline{F}}$ ออกเป็นการเสียรูปจากการยืด $\underline{\underline{U}}$ และ $\underline{\underline{V}}$ และการเสียรูปจากการหมุน $\underline{\underline{R}}$ แสดงก้อนวัสดุไม่มีการเสียรูปที่เวลาอ้างอิง $t = t_0$ และเกิดการเสียรูปที่เวลา t ใด ๆ

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{\delta}} \tag{17}$$

เมื่อ $\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1}$ และ $\underline{\underline{U}}$ และ $\underline{\underline{V}}$ เป็นเทนเซอร์สมมาตรและมีค่าเป็นบวกเสมอ (Symmetric and positive definite) โดย $\underline{\underline{U}}$ มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์การยืดทางขวา (Right stretch tensor) และ $\underline{\underline{V}}$ มีชื่อเรียกว่าเทนเซอร์การยืดทางซ้าย (Left stretch tensor) ดังแสดงในภาพที่ 5 ดังนั้นจากสมการที่ (16) เราจะมีเทนเซอร์การยืดทางซ้าย

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{R}}^T \tag{18}$$

และเทนเซอร์การยืดทางขวา

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}} \tag{19}$$

เรานิยามเทนเซอร์ความเครียดคอชี่ (Cauchy strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}} \quad (20)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดกรีน (Green strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}} \quad (21)$$

และความสัมพันธ์ระหว่าง $\underline{\underline{B}}$ และ $\underline{\underline{C}}$ คือ

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{R}}^T \quad (22)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดฟินเกอร์ (Finger strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}})^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1} (\underline{\underline{F}}^{-1})^T = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}} \quad (23)$$

และนิยามเทนเซอร์ความเครียดพิโอล่า (Piola strain tensor) ดังนี้

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = (\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T)^{-1} = (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}} \quad (24)$$

จากสมการที่ (20) และ (24) จะเห็นได้ชัดว่า

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (25)$$

และจากสมการที่ (22) และ (24) จะเห็นว่า

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{B}} \quad (26)$$

จากสมการที่ (14) ที่เวลา t_0 ซึ่งเป็นเวลาอ้างอิงดังนั้น

$$\underline{\underline{R}}(t_0) = \underline{\underline{U}}(t_0) = \underline{\underline{V}}(t_0) = \underline{\underline{C}}(t_0) = \underline{\underline{B}}(t_0) = \underline{\underline{\delta}} \quad (27)$$

ความเครียดลากรางค์

พิจารณาภาพที่ 4 จะเห็นได้ว่าอนุภาค P ที่เวลาอ้างอิง t_0 เคลื่อนที่ไปที่ $P(t)$ เป็นระยะกระจัด $\bar{u}(\bar{X}, t)$ ดังนั้น

$$\bar{x} = \bar{X} + \bar{u}(\bar{X}, t) \quad (28)$$

และในทำนองเดียวกันอนุภาค Q ที่เวลาอ้างอิง t_0 เคลื่อนที่ไปที่ $Q(t)$ เป็นระยะกระจัด $\bar{u}(\bar{X} + d\bar{X}, t)$

$$\bar{x} + d\bar{x} = \bar{X} + d\bar{X} + \bar{u}(\bar{X} + d\bar{X}, t) \quad (29)$$

เอาสมการที่ (29) ลบด้วยสมการที่ (28) จะได้

$$d\bar{x} = d\bar{X} + \bar{u}(\bar{X} + d\bar{X}, t) - \bar{u}(\bar{X}, t) \quad (30)$$

เนื่องจากสมการที่ (30) เป็นนิยามเกรเดียนต์ของเวกเตอร์ ทำให้เราสามารถได้ว่า

$$d\bar{x} = d\bar{X} + \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{u} \cdot d\bar{X} \quad (31)$$

โดย $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{u}$ คือเทนเซอร์เกรเดียนต์ของระยะกระจัด (Displacement gradient tensor) เมื่อตัวห้อย \bar{X} ในสัญลักษณ์เกรเดียนต์ $\bar{\nabla}_{\bar{X}}$ เป็นการย้ายอนุพันธ์เทียบกับพิกัดตำแหน่งที่เวลาอ้างอิง (Lagrange or reference coordinates)

$$\bar{\nabla}_x \bar{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}_{123} \quad (32)$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (8) และ (31) จะเห็นว่า

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u} \quad (33)$$

โดยเมื่อแทนค่าสมการที่ (33) ลงในสมการที่ (20) จะได้

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u})^T (\underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u}) \quad (34)$$

คุณกระจายสมการที่ (34) จะได้

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u} + (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T + (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T (\bar{\nabla}_x \bar{u}) \quad (35)$$

ในการทำงานเดียวกันเมื่อแทนค่าสมการที่ (33) ลงในสมการที่ (21) จะได้

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T = (\underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u}) (\underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u})^T \quad (36)$$

คุณกระจายสมการที่ (36) จะได้

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\delta}} + \bar{\nabla}_x \bar{u} + (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T + (\bar{\nabla}_x \bar{u}) (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T \quad (37)$$

ถ้ากำหนดให้

$$\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}} = \bar{\nabla}_x \bar{u} + (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T + (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T (\bar{\nabla}_x \bar{u}) \quad (38)$$

โดย $\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}$ คือเทนเซอร์ความเครียดลากรางค์ (Lagrange strain tensor) นิยามโดย

$$\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}} = \underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\delta}} \quad (39)$$

และจะลดรูปเป็นถ้าการเปลี่ยนรูปแคเล็กน้อยเท่านั้น (Infinitesimal strain) ซึ่งสามารถละเทอม $(\bar{\nabla}_x \bar{u})^T (\bar{\nabla}_x \bar{u})$ ที่มีอันดับสอง $O(\bar{\nabla}_x \bar{u})^2$ ออกไปก็จะกลายเป็นเทนเซอร์ความเครียดสำหรับการเสียรูปน้อย ๆ (Infinitesimal strain tensor) ที่เรารู้จักกันดี

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \bar{\nabla}_x \bar{u} + (\bar{\nabla}_x \bar{u})^T \quad (40)$$

เมื่อ

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & 2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & 2 \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}_{123} \quad (41)$$

เมื่อเขียนเทนเซอร์ $\underline{\underline{\Gamma}}$ ในรูปดัชนีปั้งซ์จะได้

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \quad (42)$$

เมื่อ u_i และ u_j เป็นระยะกระจัดของก้อนวัสดุ (Displacement of the material element) ในแนวแกน i และ j และ X_i และ X_j เป็นตำแหน่งของก้อนของวัสดุในแนวแกน i และ j ตามลำดับ เมื่อ $i, j = 1, 2, 3$ สมการที่ (42) ทำให้เราทราบว่า ความเครียดของวัสดุเกิดจากการเสียรูปของวัสดุเชิงเส้น (Linear deformation) เมื่อ $i = j$ ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแนวทแยง (Diagonal positions) ของเทนเซอร์ความเครียด และเกิดการเสียรูปเชิงมุม (Angular deformation) เมื่อ $i \neq j$ ซึ่งจะอยู่นอกตำแหน่งทแยงมุม (Off-diagonal position) ของเทนเซอร์ความเครียด

ความเครียดออยเลอร์

ในที่นี้เราจะเขียนสมการเวกเตอร์ในสมการที่ (28) ให้อยู่ในระบบแกนออยเลอร์หรือพิกัดเชิงพื้นที่ (Euler or spatial coordinates) กล่าวคือ

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{u}}(\underline{\underline{x}}, t) \quad (43)$$

หรือเขียนในรูปดัชนีปั้งซ์คือ

$$X_i = x_i - u_i(\underline{\underline{x}}, t) \quad (44)$$

อนุพันธ์สมการที่ (44) เทียบกับพิกัดเชิงพื้นที่

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (45)$$

หรือเขียนในรูปดัชนีปั้งซ์คือ

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}} \quad (46)$$

โดย $\underline{\underline{F}}^{-1}$ แสดงในสมการที่ (11) $\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}}$ คือเทนเซอร์เกรเดียนต์ของระยะกระจัด (Displacement gradient tensor) เมื่อตัวห้อย x ในสัญลักษณ์เกรเดียนต์ $\underline{\underline{\nabla}}_x$ เป็นการย้ายว่าอนุพันธ์เทียบกับพิกัดเชิงพื้นที่ (Spatial or Euler coordinates) ในทำนองเดียวกันกับเทนเซอร์ความเครียดควอซีที่แสดงในสมการที่ (35) และเทนเซอร์ความเครียดกรีนแสดงในสมการที่ (37) เมื่อแทนค่าสมการที่ (46) เทนเซอร์ความเครียดฟินเกอร์ในสมการที่ (23) สามารถเขียนได้เป็น

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1} (\underline{\underline{F}}^{-1})^T = \underline{\underline{\delta}} - \left[(\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}}) + (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}})^T \right] + (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}}) (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}})^T \quad (47)$$

และเทนเซอร์ความเครียดพิโอล่าในสมการที่ (24) จะเป็น

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\delta}} - \left[(\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}}) + (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}})^T \right] + (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}}) (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}})^T \quad (48)$$

ถ้ากำหนดให้

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}})^T - (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}})^T (\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{\underline{u}}) \quad (49)$$

โดย $\underline{\underline{\gamma}}$ คือเทนเซอร์ความเครียดออยเลอร์ (Euler strain tensor) นิยามโดย

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{\delta}} - \underline{\underline{B}}^{-1} \quad (50)$$

และจะสามารถลดรูปได้ถ้ากลุ่มก้อนวัสดุมีการเปลี่ยนรูปทรงแค่เพียงเล็กน้อยเท่านั้น (Infinitesimal strain) เช่นของแข็งที่มีสมบัติอีลาสติกเชิงเส้น (Linearly elastic solid) กล่าวคือการเสียรูปของวัสดุจะแปรผันตรงกับความเค้นที่กระทำกับวัสดุ ซึ่งทำให้สามารถละเทอม $(\nabla_x \bar{u})^T (\nabla_x \bar{u})$ ที่มีอันดับขนาด $O(\nabla_x \bar{u})^2$ ออกไปก็จะกลายเป็นเทนเซอร์ความเครียดสำหรับการเสียรูปน้อย ๆ (Infinitesimal strain tensor) ที่เรารู้จักกันดี

$$\underline{\underline{\gamma}} = \nabla_x \bar{u} + (\nabla_x \bar{u})^T \tag{51}$$

เมื่อ

$$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{123} \tag{52}$$

เมื่อเขียนเทนเซอร์ $\underline{\underline{\gamma}}$ ในรูปดัชนีบ่งชี้จะได้

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{53}$$

เมื่อ u_i และ u_j เป็นระยะกระจัดของก้อนของวัสดุ (Displacement of the material element) ในแนวแกน i และ j และ x_i และ x_j เป็นตำแหน่งของก้อนของวัสดุในแนวแกน i และ j ตามลำดับ เมื่อ $i, j = 1, 2, 3$ สมการที่ (52) ทำให้เราทราบว่าความเครียดของวัสดุเกิดจากการเสียรูปของวัสดุเชิงเส้น (Linear deformation) เมื่อ $i = j$ ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแนวทแยง (Diagonal positions) ของเทนเซอร์ความเครียด และเกิดการเสียรูปเชิงมุม (Angular deformation) เมื่อ $i \neq j$ ซึ่งจะอยู่นอกตำแหน่งทแยงมุม (Off-diagonal position) ของเทนเซอร์ความเครียด จะเห็นได้ว่าเทนเซอร์ความเครียดในสมการที่ (35), (37), (47) และ (48) ที่ยังคงเทอมที่มีอันดับขนาด $O(\nabla_x \bar{u})^2$ และ $O(\nabla_x \bar{u})^2$ อยู่ ดังนั้นเทนเซอร์ความเครียดในหัวข้อนี้ทุกตัวเป็นเทนเซอร์ความเครียดสำหรับวัสดุที่มีการเสียรูปมาก ๆ (Large deformation or finite deformation) ดังนั้นความเค้นจะไม่เป็นเชิงเส้นกับเทนเซอร์เกรเดียนต์การเคลื่อนที่

อัตราการเสียรูป

อัตราการเสียรูป (Rate of deformation) ของวัสดุจะส่งผลต่อความเค้นของวัสดุที่เป็นของเหลว แต่จะไม่มีผลต่อความเค้นของวัตถุแข็งเกร็งที่เสียรูปต่ำกว่าจุดคราก (Yield point) แต่อาจจะส่งผลต่อวัตถุแข็งเกร็งที่ถูกทำให้เสียรูปจนมากกว่าจุดครากไปแล้วซึ่งเป็นช่วงที่วัสดุมีสมบัติเป็นพลาสติก (Plastic behavior) หรือเสียรูปอย่างถาวรได้ อัตราการเสียรูปหาได้จากการอนุพันธ์สมการที่ (9) เทียบกับเวลาจะได้ (Morozov & Spagnolie, 2015)

$$\frac{D\mathbf{F}_{ij}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \left[(\nabla \bar{v})^T \underline{\underline{F}} \right]_{ij} \tag{54}$$

จะได้

$$\frac{DF}{Dt} = (\bar{\nabla} \bar{v})^T \underline{\underline{F}} \quad (55)$$

เมื่อ $\frac{DF}{Dt}$ เป็นเทนเซอร์อัตราการผลิตของวัสดุและ $\bar{\nabla} \bar{v}$ คือเทนเซอร์เกรเดียนต์ความเร็วนิยามโดย

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{123} \quad (56)$$

จากสมการที่ (55) อนุพันธ์สมการที่ (12) เทียบกับเวลาจะได้

$$\frac{D}{Dt} (\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1}) = \frac{DF}{Dt} \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}} \frac{D\underline{\underline{F}}^{-1}}{Dt} = \underline{\underline{0}} \quad (57)$$

ใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (55) แทนลงใน (57) แล้วจัดรูปจะได้

$$\frac{DF^{-1}}{Dt} = -\underline{\underline{F}}^{-1} (\bar{\nabla} \bar{v})^T \quad (58)$$

จากสมการที่ (54) จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{DF_{ij}}{Dt} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \quad (59)$$

สมการที่ (59) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์-เทนเซอร์ได้คือ

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \frac{DF}{Dt} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (60)$$

เนื่องจากเทนเซอร์เกรเดียนต์ความเร็ว $\bar{\nabla} \bar{v}$ สามารถแยกตัวประกอบออกได้เป็นอัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์ที่สมมาตรและเทนเซอร์การหมุนวน $\underline{\underline{\omega}}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์สมมาตรเมื่อดังแสดงในสมการที่ (61) (Bird et al., 1977, 1987)

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\dot{\gamma}}} + \underline{\underline{\omega}}) \quad (61)$$

ทำการอนุพันธ์สมการที่ (16) เทียบกับเวลาจะได้

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{DR}{Dt} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{R}} \frac{DU}{Dt} \quad (62)$$

แทนสมการที่ (62) ลงในสมการที่ (60) จะได้

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \left(\frac{DR}{Dt} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{R}} \frac{DU}{Dt} \right) \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{R}}^T = \frac{DR}{Dt} \underline{\underline{R}}^T + \underline{\underline{R}} \left(\frac{DU}{Dt} \underline{\underline{U}}^{-1} \right) \underline{\underline{R}}^T \quad (63)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (63) สามารถแยกออกได้เป็นสองเทอมโดยเทอมแรกทางขวามือเป็นเทนเซอร์สมมาตรเสมือน (skew symmetric tensor) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้จากการอนุพันธ์สมการที่ (17) เทียบกับเวลาจะได้

$$\frac{DR}{Dt} R^T = -R \frac{DR^T}{Dt} = -\left(\frac{DR}{Dt} R^T\right)^T \quad (64)$$

ซึ่งเป็นเทอมที่มีแต่การหมุนวน ในขณะที่เทอมที่สองทางขวามือของสมการที่ (63) มีทั้งการหมุนและการยืดตัวของวัสดุ ดังนั้นถ้าเราสามารถแยกเทอมการยืดดึงออกเป็นเทนเซอร์สมมาตรและสมมาตรเสมือนนั้นคือ (NPTEL, 2016)

$$\frac{DU}{Dt} U^{-1} = sym\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) + skw\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) \quad (65)$$

เมื่อ

$$sym\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1} + \frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) \quad (66)$$

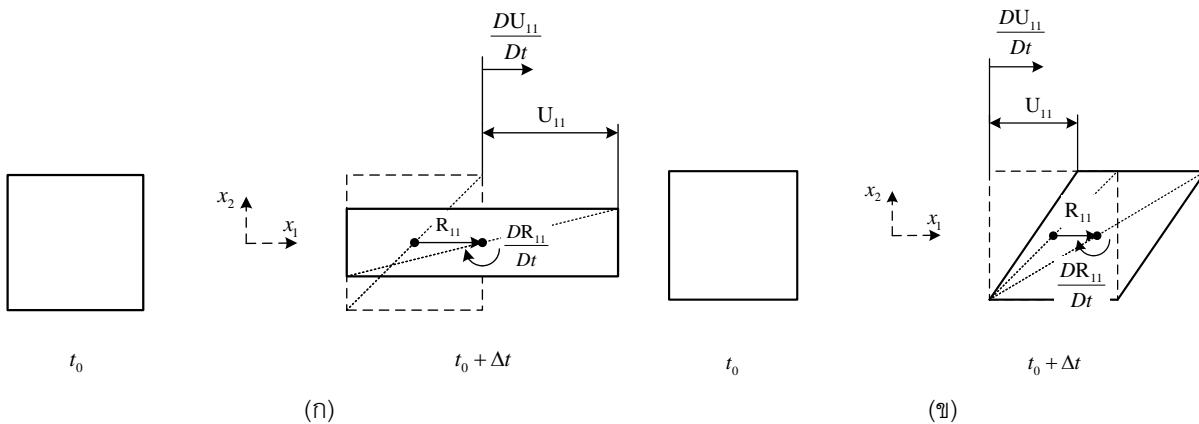
$$skw\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1} - \frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) \quad (67)$$

ดังนั้นเมื่อเราเทียบสมการที่ (61) และสมการที่ (63) เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\dot{\underline{\gamma}} = 2R \left(sym\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) \right) R^T \quad (68)$$

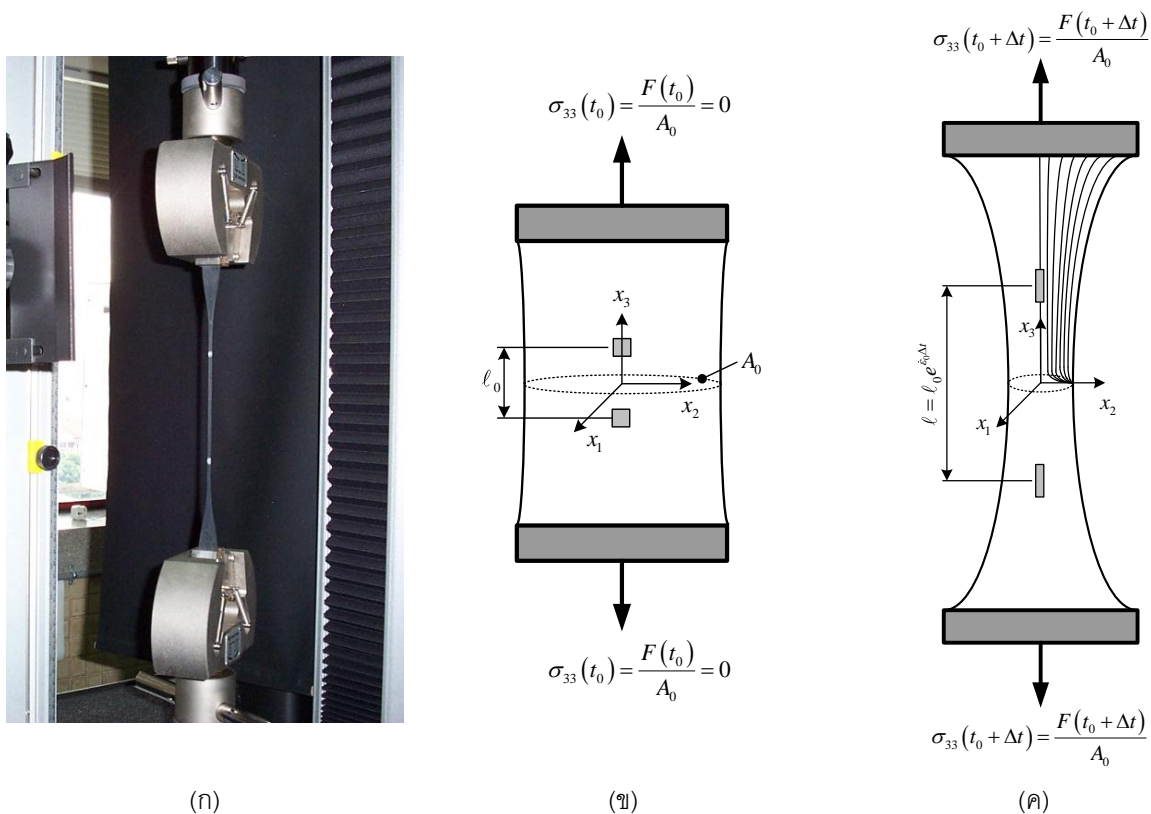
และ

$$\underline{\omega} = 2\left(\frac{DR}{Dt} R^T + R \left(skw\left(\frac{DU}{Dt} U^{-1}\right) \right) R^T\right) \quad (69)$$



ภาพที่ 6 แสดงอิทธิพลของการยืด U_{11} และอัตรายืด $\frac{DU_{11}}{Dt}$ ในทิศทางที่ 1 การหมุน R_{11} และอัตราหมุน $\frac{DR_{11}}{Dt}$ ของก้อนอนุภาควัสดุในทิศทางที่ 1 ที่มีผลต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม $\dot{\underline{\gamma}}$ และการหมุนวน $\underline{\omega}$ ที่เกิดจาก (ก) การยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial extension) และ (ข) การเฉือนแบบง่าย (Simple shear) ที่เกิดบนระนาบ (x_1, x_2)

โดยเทนเซอร์อัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม $\underline{\dot{\gamma}}$ บ่งบอกถึงอัตราที่กลุ่มก้อนอนุภาคตัวข้าง ๆ เคลื่อนที่สัมพันธ์ต่อกัน ในขณะที่เทนเซอร์การหมุนวน $\underline{\omega}$ เป็นการวัดความเร็วในการหมุน ณ ตำแหน่งนั้น ๆ น่าสนใจว่าเทนเซอร์การหมุนวน $\underline{\omega}$ แยกออกเป็นสองเทอมซึ่งมีการหมุนวนเนื่องจากการยืดด้วยดังแสดงในเทอมที่สองทางขวามือของสมการที่ (69) และแสดงตัวอย่างของอิทธิพลของการยืด \underline{U} และอัตรายืด $\frac{DU}{Dt}$ การหมุน \underline{R} และอัตราหมุน $\frac{DR}{Dt}$ ของก้อนอนุภาควัสดุที่มีผลต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม $\underline{\dot{\gamma}}$ และการหมุนวน $\underline{\omega}$ ที่เกิดจาก (ก) การยืดดึงทิศทางเดียว (Uniaxial extension) และ (ข) การเฉือนแบบง่าย (Simple shear) ที่เกิดบนระนาบ (x_1, x_2) ในภาพที่ 6 ในที่นี้แสดงเฉพาะการยืด U_{11} และอัตรายืด $\frac{DU_{11}}{Dt}$ ในทิศทางที่ 1 การหมุน R_{11} และอัตราหมุน $\frac{DR_{11}}{Dt}$ ของก้อนอนุภาควัสดุในทิศทางที่ 1 เท่านั้น



ภาพที่ 7 (ก) แสดงการทดสอบชิ้นงานยางคงรูปบนเครื่องทดสอบความเค้นแรงดึงตามมาตรฐาน ASTM D412-a98 (2003) (ได้รับอนุญาตให้พิมพ์ซ้ำได้จาก Wangchai, 2005) (ข) แสดงก้อนอนุภาคของไหลที่เวลา t_0 และ (ค) แสดงการเคลื่อนที่และการเสียรูปของก้อนอนุภาคในการดึงทิศทางเดียวที่ถูกดึงในทิศ x_3 ของไหลที่เวลา $t_0 + \Delta t$ โดยเส้นที่มูมบนขวาแสดงเส้นทางการไหล (Streamlines) ในเนื้อวัสดุ

การประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรม

ในที่นี้จะใช้การทดสอบการดึงทิศทางเดียว (Uniaxial extension) เป็นตัวอย่างในการคำนวณเพื่อแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของการเคลื่อนที่และการเสียรูปของวัสดุในการทดสอบทางวิศวกรรม โดยทั่วไปแล้วขึ้นทดสอบตามมาตรฐาน ASTM

D412-a98 (2003) ในการทดสอบการดึงยืดทิศทางเดียวจะถูกดึงในทิศทางที่ 3 และเกิดการเคลื่อนที่และการเสียรูปของก้อนอนุภาคดังแสดงในภาพที่ 7 ทำให้เกิดการเสียรูปในชั้นทดสอบดังแสดงในภาพที่ 8 โดยตำแหน่งของวัสดุที่เวลา t ใด ๆ เทียบกับตำแหน่งของวัสดุที่เวลาตั้งต้น t_0 คือ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 X_1 \\ -\lambda_2 X_2 \\ \lambda_3 X_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{70}$$

เมื่อ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ เป็นอัตราส่วนการยืดในแนว x_1, x_2, x_3 ตามลำดับ

(ก) จงหาปริมาตรของก้อนอนุภาคที่เปลี่ยนไปเทียบกับปริมาตรเดิม

(ข) จงหาเทนเซอร์การยืดทางขวา $\underline{\underline{U}}$ และเทนเซอร์การยืดทางซ้าย $\underline{\underline{V}}$ ของก้อนอนุภาคของวัสดุ

(ค) จงหาเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{R}}$ ของก้อนอนุภาค

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจพิจารณาก้อนวัสดุรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีขนาดก่อนเกิดการเสียรูปขนาดเท่ากับ dX_1, dX_2, dX_3 ดังแสดงในภาพที่ 8 โดยที่เวกเตอร์

$$d\bar{X}_i = dX_i \delta_i \tag{71}$$

เมื่อ δ_i เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยชี้ไปในทิศทางที่ i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ ดังนั้นปริมาตรเดิมของก้อนอนุภาคก่อนการเสียรูป dV_0 หาได้จาก

$$dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3 \tag{72}$$

และมีขนาดของก้อนอนุภาคหลังการเสียรูปเท่ากับ dx_1, dx_2, dx_3 โดยมีเวกเตอร์

$$d\bar{x}_i = \underline{\underline{F}} d\bar{X}_i \tag{73}$$

ดังนั้นปริมาตรของก้อนอนุภาคของวัสดุหลังการเสียรูป dV หาได้จาก

$$dV = \left[\underline{\underline{F}} d\bar{X}_1 \cdot (\underline{\underline{F}} d\bar{X}_2 \times \underline{\underline{F}} d\bar{X}_3) \right] = dX_1 dX_2 dX_3 \left[\underline{\underline{F}} \delta_1 \cdot (\underline{\underline{F}} \delta_2 \times \underline{\underline{F}} \delta_3) \right] \tag{74}$$

ดังนั้น

$$dV = (\det \underline{\underline{F}}) dV_0 = J dV_0 \tag{75}$$

จากสมการที่ (70) เทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{F}}$ ของวัสดุทดสอบที่ถูกดึงในทิศทางที่ 3 หาได้จากสมการที่ (9) คือ

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{76}$$

แทนสมการที่ (76) ลงในสมการที่ (75) จะได้

$$dV = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dV_0 \tag{77}$$

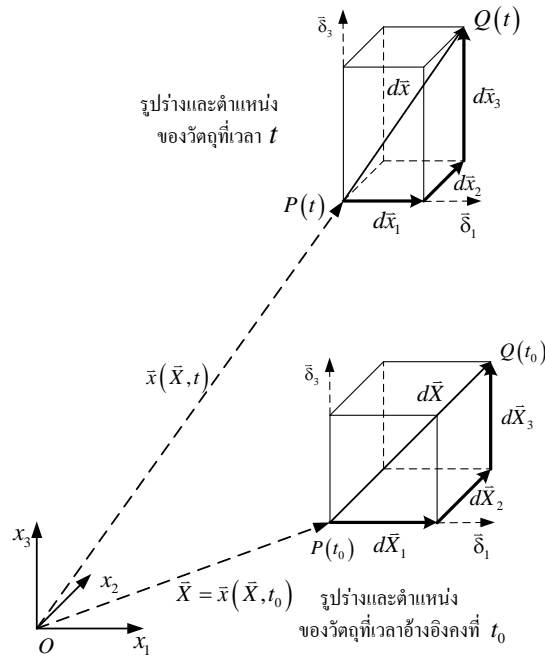
สังเกตว่าถ้าวัสดุมีสมบัติที่ไม่สามารถอัดตัวได้ (Incompressible) $dV = dV_0$ ดังนั้น

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \underline{\underline{F}} = 1 \tag{78}$$

จากนิยามเทนเซอร์ความเครียดคอชี่ (Cauchy strain tensor) ในสมการที่ (20)

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{123} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}_{123} \tag{79}$$

ดังนั้นเทนเซอร์การยืดทางขวา $\underline{\underline{U}}$ ของก้อนอนุภาคของวัสดุคือ



ภาพที่ 8 แสดงการเสียรูปของก้อนอนุภาคของวัสดุจากขนาด $d\bar{X}$ ที่เวลาอ้างอิงคงที่ t_0 ไปเป็นขนาด $d\bar{x}$ ที่เวลา t โดยวัสดุที่ตำแหน่ง $P(t_0)-Q(t_0)$ เคลื่อนที่ไปอยู่ที่ตำแหน่ง $P(t)-Q(t)$ ที่ถูกดึงในทิศทางที่ 3

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{123} \tag{80}$$

ในการทำนองเดียวกันเทนเซอร์การยืดทางซ้าย $\underline{\underline{V}}$ สามารถหาได้จากสมการที่ (21) และสังเกตว่าในที่นี้เทนเซอร์การยืดทางซ้าย $\underline{\underline{V}}$ มีค่าเท่ากับเทนเซอร์การยืดทางขวา $\underline{\underline{U}}$ และเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{R}}$ ของก้อนอนุภาคสามารถหาได้จากสมการที่ (16)

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}}\underline{\underline{U}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{123} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}_{123} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{123} \tag{81}$$

เมื่อ $R_{11} = -1$ และ $R_{21} = R_{31} = 0$ ดังนั้น

$$\underline{\underline{R}} \bar{\delta}_1 = R_{11} \bar{\delta}_1 = -\bar{\delta}_1 \tag{82}$$

และมี

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}(-\underline{\underline{\delta}}_1) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11}(-\underline{\underline{\delta}}_1) = \underline{\underline{\delta}}_1 \tag{83}$$

จากสมการที่ (82) และ (83) จะเห็นได้ว่า $\pm \underline{\underline{\delta}}_1$ เป็นเวกเตอร์ที่สามารถเปลี่ยนเทนเซอร์ $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ ให้เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับตัวมันเองได้ ดังนั้นเราจะเรียกเวกเตอร์ $\pm \underline{\underline{\delta}}_1$ ว่าเป็นหนึ่งในแกนหลัก (Eigenvectors) ของเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ และในที่นี้มี $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11} = -1$ เป็นหนึ่งในค่าไอเกน (Eigenvalue) ของเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ ในทำนองเดียวกันเมื่อ $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{32} = 0$ ดังนั้น $\pm \underline{\underline{\delta}}_2$ เป็นหนึ่งในแกนหลัก (Eigenvectors) ของเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ และมี $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22} = -1$ เป็นหนึ่งในค่าไอเกน (Eigenvalue) ของเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ และถ้า $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{13} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{23} = 0$ ดังนั้น $\pm \underline{\underline{\delta}}_3$ เป็นหนึ่งในแกนหลัก (Eigenvectors) ของเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ และมี $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{33} = 1$ เป็นหนึ่งในค่าไอเกน (Eigenvalue) ของเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ โดยสรุปแล้วในที่นี้ก่อนอนุภาคของวัสดุที่ถูกดึงยืดทิศทางเดียวจะก่อให้เกิดการหมุนของก้อนอนุภาคของวัสดุในแนวแกนทั้ง 3 แนวแกนไปพร้อม ๆ กัน (ดูการหาค่าไอเกนและเวกเตอร์ไอเกนเพิ่มเติมได้ในหัวข้อ 2.22 ของ Lai *et al.*, 2010)

บทสรุป

ด้วยแนวคิดทางกลศาสตร์ความต่อเนื่อง (Continuum mechanics) คือเราจะไม่มองสสารในระดับอะตอมแต่จะมองสสารที่เป็นกลุ่มก้อน ดังนั้นการศึกษาระบวนการเสียรูปของวัสดุ (เนื่องจากแรงภายนอกมากกระทำ) จะทำให้เกิดการเสียรูปเชิงเส้น (Linear deformation) การเสียรูปเชิงมุม (Angular deformation) การเคลื่อนที่ (Linear translation) และการหมุน (Rotation) ไปพร้อม ๆ กัน ในบทความนี้อธิบายถึงการเสียรูปทรงของวัสดุที่เวลา t ใด ๆ โดยอ้างอิงกับรูปทรงที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0 = 0$ ในที่นี้เป็นการสืบหาการเสียรูปของวัสดุไปข้างหน้าทีเวลาปัจจุบัน t ใด ๆ ที่ใช้กับวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid body) ของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) วัสดุไฮเปอร์อีลาสติก (Hyperelastic material) หรือวัสดุหนืดยืดหยุ่น (Viscoelastic material) โดยเทนเซอร์เกรเดียนต์การเสียรูป $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$ สามารถแยกออกเป็นการเสียรูปจากการยืดทางขวา $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ (หรือยืดทางซ้าย $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$) และการเสียรูปจากการหมุน $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ ได้ และได้อธิบายถึงความเครียดลากรางค์และความเครียดออยเลอร์ซึ่งเป็นการนิยามความเครียดของก้อนวัสดุเดียวกันผ่านมุมมองของลากรางค์และออยเลอร์ตามลำดับ ในตอนท้ายของบทความได้มีการพูดถึงอัตราการเสียรูปของวัสดุซึ่งโดยมากจะมีผลกับวัสดุที่เป็นของเหลว แต่จะไม่ส่งผลต่อการเสียรูปของวัตถุแข็งเกร็ง โดยเทนเซอร์เกรเดียนต์ความเร็ว $\underline{\underline{\mathbf{v}}}$ สามารถแยกตัวประกอบออกได้เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเชิงมุม $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์ที่สมมาตรและเทนเซอร์การหมุน $\underline{\underline{\omega}}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์สมมาตรเสมือน

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณ นายพงศ์เทพ พ่วงทอง นักศึกษาระดับปริญญาเอก ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ช่วยอ่านตรวจทานต้นฉบับชุดนี้

เอกสารอ้างอิง

Astarita, G. and G. Marrucci (1974). *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. New York, USA: McGraw Hill.
 ASTM D412-98a. (2003). *Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers-Tension*. West Conshohocken, PA, United States: ASTM International.

- Bird, R.B., R.C. Armstrong, O. Hassager (1977). *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics*. (1st ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Bird, R.B., R.C. Armstrong, O. Hassager (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids: Volume 1 Fluid Mechanics*. (2nd ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Cengel, Y. A. and J. M. Cimbala (2006). *Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications*. (International Edition). New York, USA: McGraw Hill.
- Irgens, Fridtjov (2008). *Continuum Mechanics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-540-74297-5.
- Itskov, Mikhail (2014). *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with Applications to Continuum Mechanics*. (4th ed.). New York, USA: Springer.
- Jog, C. S. (2015), *Continuum Mechanics: Foundations and Applications of Mechanics, Volume I*. (Third edition). Cambridge University Press.
- Lai, W. Michael, David Rubin and Erhard Krempf (2010), *Introduction to Continuum Mechanics*. (4th ed.). New York, USA: Butterworth-Heinemann.
- Morozov, Alexander and Spagnolie, Saverio E. (2015), *Introduction to Complex Fluids, Complex Fluids in Biological Systems, Experiment, Theory, and Computation*. Edited by Spagnolie, Saverio E. New York, USA: Springer. ISBN 978-1-4939-2064-8.
- Morrison, F. A. (2001), *Understanding Rheology*, New York, USA: Oxford University Press.
- Munson, B. R., D. F. Young, and T. H. Okiishi (2002). *Fundamentals of Fluid Mechanics*. (4th ed.). New York, USA: John Wiley and Sons.
- NPTEL (2016). *Mechanical Engineering – Continuum Mechanics*, Lecture-21: The Rate of Deformation and Spin, Module-3: Kinematics. Ad hoc document. Joint initiative of IITs and IISc – Funded by MHRD. Government of India. Retrieved July 7, 2019, from <https://nptel.ac.in/courses/112103167/21>.
- Rudnicki, J.W. (2015). *Fundamentals of Continuum Mechanics*. West Sussex, UK: John Wiley & Sons, Ltd.
- Wangchai, Sathaphon (2005). *Finite Element Analysis of Heat Generation in Particle Filled Natural Rubber Vulcanizates During Cyclic Deformation*, Master Thesis. Department of Mechanical Engineering, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Thailand. (in Thai).
- White, F.M. (2010). *Fluid Mechanics*. (7th ed.). New York, USA: McGraw Hill.