เอกลักษณ์สำหรับนัยทั่วไปใหม่ของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

Identities on the New Generalizations of Fibonacci and Lucas Sequences

กานต์พิชชา แซ่ตั้ง, ปารตี สุระกำแหง และ ศรัณยา เฮงสวัสดิ์*

Kanpitcha Saetang, Paratee Surakamhang and Saranya Hangsawat*

โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา

Mathematics and Statistics Program, Faculty of Science and Technology, SongKhla Rajabhat University

Received : 25 July 2018

Accepted : 8 November 2018

Published online : 21 November 2018

บทคัดย่อ

งานวิจัยครั้งนี้ได้ทำการศึกษาลำดับทั่วไป $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ ซึ่งนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดโดย $f_n = a^2 f_{n-1} + \left(b - a^2\right) f_{n-2}$ และ $l_n = a^2 l_{n-1} + \left(b - a^2\right) l_{n-2}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ และ $l_0 = 2, l_1 = a^2$ ตามลำดับ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $b \neq a^2$ เราได้ศึกษาการสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรไบเนตของลำดับ พร้อมทั้งพิสูจน์เอกลักษณ์บางตัวและสมบัติบางประการของลำดับทั่วไปโดยใช้สูตรไบเนต

คำสำคัญ : ลำดับฟีโบนักชี, ลำดับลูคัส, ฟังก์ชันก่อกำเนิด, สูตรไบเนต

Abstract

In this paper, we introduced the sequences $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ which are defined by the recurrence relations $f_n = a^2 f_{n-1} + \left(b - a^2\right) f_{n-2}$ and $l_n = a^2 l_{n-1} + \left(b - a^2\right) l_{n-2}$ for positive integer $n \geq 2$ with initial conditions, $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ and $l_0 = 2, l_1 = a^2$ respectively, where a and b are positive real numbers and $b \neq a^2$. We study the generating functions, Binet's formulas. Moreover, we also provide generalized identities of $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ by using Binet's formulas for derivation.

Keywords : Fibonacci sequence, Lucas sequence, generating functions, Binet's formulas

*Corresponding author. E-mail: saranya.nu@skru.ac.th

บทนำ

ลำดับฟีโบนักชี $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ และ ลำดับลูคัส $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับ $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$

คือ $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$ ตามลำดับ

และสูตรไบเนตของลำดับฟีโบนักชี และลำดับลูคัส คือ

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^n$$

และ $$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right)^n$$

เมื่อ $(1+\sqrt{5})/2$ และ $(1-\sqrt{5})/2$ เป็นผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะ $x^2 - x - 1 = 0$

มีงานวิจัยจำนวนมากที่มีการนำสมบัติของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัสมานำเสนอในรูปแบบใหม่ ซึ่งงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (Horadam, A.F, 1961),(Klein, S.T, 1991) ผู้เขียนได้นำเสนอลำดับฟีโบนักชี โดยการเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น หรือบางแนวคิด (Falcon,S and Plaza, A, 2007) เปลี่ยนนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด ในปี 2009 Marcia Edson และ Omer Yayenie ได้ทำการศึกษาลำดับฟีโบนักชีโดยการเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิด ต่อมาในปี 2011 Marcia Edson และคณะนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดขึ้นใหม่และทำการศึกษาสมบัติและเอกลักษณ์ของลำดับดังกล่าว และ ในปี ค.ศ. 2014 Goksal Bilgici ได้ศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับทั่วไปของฟีโบนักชีและลำดับลูคัส โดยการเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิดและเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ในการทำวิจัยครั้งนี้จึงสนใจที่จะศึกษาลำดับทั่วไปของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส โดยการเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิดและเงื่อนไขค่าเริ่มต้น พร้อมทั้งศึกษาฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรไบเนต เอกลักษณ์และสมบัติบางประการของลำดับทั่วไป

วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับทั่วไปที่ถูกนิยามขึ้นจากการเปลี่ยนความสัมพันธ์เวียนเกิด และเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส พร้อมทั้งหาฟังก์ชันก่อกำเนิด สูตรไบเนต และศึกษาเอกลักษณ์และสมบัติบางประการของลำดับทั่วไป โดยใช้สูตรไบเนต

บทนิยาม 1 กำหนดให้ลำดับทั่วไป $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ โดยมีความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$f_n = a^2 f_{n-1} + \left(b - a^2\right) f_{n-2} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n \geq 2 \tag{1}$$

$$l_n = a^2 l_{n-1} + \left(b - a^2\right) l_{n-2} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n \geq 2 \tag{2}$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นดังนี้ $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ และ $l_0 = 2,\ l_1 = a^2$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $b \neq a^2$ ถ้า $(a,b) = (1,2)$ แล้ว ลำดับทั่วไป $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ จะเป็นลำดับฟีโบนักชีและลำดับลูคัส

ฟังก์ชันก่อกำเนิด (Generating functions)

ทฤษฎีบท 2 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1 - a^2 x - (b - a^2) x^2} \tag{3}$$

และ

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n = \frac{2 - a^2 x}{1 - a^2 x - (b - a^2) x^2} \tag{4}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ และ $l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n$

จะได้

$$f(x) = x + a^2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} f_n x^n \tag{5}$$

$$-a^2 x f(x) = -a^2 x^2 - \sum_{n=3}^{\infty} a^2 f_{n-1} x^n \tag{6}$$

และ

$$(a^2 - b) x^2 f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} (a^2 - b) f_{n-2} x^n \tag{7}$$

ผลรวมของสมการ (5), (6) และ (7) และใช้นิยามของความสัมพันธ์ (1) จะได้

$$[1 - a^2 x - (b - a^2) x^2] f(x) = x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1 - a^2 x - (b - a^2) x^2}$$

สามารถพิสูจน์ $\sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n$ ได้ในทำนองเดียวกัน

สูตรไบเนต (Binet's formulas)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาสูตรไบเนตของลำดับทั่วไป $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$

ทฤษฎีบท 3 สูตรไบเนตของลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ คือ

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{8}$$

และ

$$l_n = \alpha^n + \beta^n \tag{9}$$

ตามลำดับ เมื่อ $\alpha = \dfrac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}$ และ $\beta = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}$

เป็นผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะ $x^2 - a^2 x - (b - a^2) = 0$ และ $\alpha\beta = a^2 - b,\ \alpha + \beta = a^2$

พิสูจน์ จากสมการ (3) สามารถเขียนได้เป็น $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \dfrac{x}{(\alpha x - 1)(\beta x - 1)}$ และแยกเป็นเศษส่วนย่อยได้

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= \frac{1}{\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}} \frac{1}{(1 - \alpha x)} - \frac{1}{\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}} \frac{1}{(1 - \beta x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \frac{1}{\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) x^n
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

สมการ (9) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเอกลักษณ์และสมบัติบางประการของลำดับทั่วไป $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ โดยใช้สูตรไบเนต

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะได้ว่า

$$f_{-n} = -\frac{1}{(a^2-b)^n} f_n \tag{10}$$

และ

$$l_{-n} = \frac{1}{(a^2-b)^n} l_n \tag{11}$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 4 สามารถทำได้โดยใช้สูตรไบเนตในสมการ (8) และสมการ (9)

ในปี ค.ศ. 1995 Melham, R.S. และ Shannon, A.G. ได้ศึกษาเกี่ยวกับเอกลักษณ์ของ Catalan และเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นผลทำให้เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5 ให้ m, n และ r จำนวนเต็ม จะได้ว่า

(1)
$$f_{n+r}f_{n-r} - f_n^2 = -(a^2-b)^{n-r} f_r^2$$
$$l_{n+r}l_{n-r} - l_n^2 = (a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^{n-r} f_r^2$$
(เอกลักษณ์ของ Catalan)

(2)
$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = -(a^2-b)^{n-1}$$
$$l_{n+1}l_{n-1} - l_n^2 = (a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^{n-1}$$
(เอกลักษณ์ของ Cassini)

(3)
$$f_{n-2}f_{n-1}f_{n+1}f_{n+2} - f_n^4 = f_n^2(a^2-b)^{n-2}(-a^4-a^2+b) + a^4(a^2-b)^{2n-3}$$
$$\begin{aligned} l_{n-2}l_{n-1}l_{n+1}l_{n+2} - l_n^4 &= l_n^2(a^2-b)^{n-2}(a^8-3a^6+3a^4b+8a^2b-4a^2-4b^2) \\ &\quad + (a^{12}-8a^{10}+8a^8b+16a^4b-32a^6b+16a^8)(a^2-b)^{2n-3} \end{aligned}$$
(เอกลักษณ์ของ Gelin Cesaro)

(4)
$$f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = (a^2-b)^n f_{m-n}$$
$$l_m l_{n+1} - l_n l_{m+1} = -(a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^n f_{m-n}$$
(เอกลักษณ์ของ d'Ocagne)

พิสูจน์ (1) โดยใช้สูตรไบเนต (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_{n+r}f_{n-r} - f_n^2 &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\alpha^{n+r}-\beta^{n+r})(\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}) - (\alpha^n-\beta^n)^2\right] \\ &= -\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{n-r}\beta^{n+r} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} - 2\alpha^n\beta^n\right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{(\alpha\beta)^{n-r}}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{2r} - 2\alpha^r\beta^r + \beta^{2r}\right]$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2 = -(a^2-b)^{n-r} f_r^2$$

และ จากสูตรไบเนต (9) จะได้ว่า

$$l_{n+r}l_{n-r} - l_n^2 = (\alpha^{n+r} + \beta^{n+r})(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r}) - (\alpha^n + \beta^n)^2$$

$$= \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r} - 2\alpha^n\beta^n$$

$$= (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^r - \beta^r)^2$$

$$= (\alpha-\beta)^2(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2$$

$$= (a^4 + 4b - 4a^2)(a^2-b)^{n-r} f_r^2$$

(2) ในข้อ (1) แทนค่า $r = 1$ และ $f_1 = 1$ จะได้เอกลักษณ์ของ Cassini

(3) จากข้อ (1) จะได้ $f_{n+r}f_{n-r} = -(a^2-b)^{n-r} f_r^2 + f_n^2$

และ $l_{n+r}l_{n-r} = (a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^{n-r} f_r^2 + l_n^2$

$$(f_{n+2}f_{n-2})(f_{n+1}f_{n-1}) - f_n^4 = \left[-a^4(a^2-b)^{n-2} + f_n^2\right]\left[-(a^2-b)^{n-1} + f_n^2\right] - f_n^4$$

$$= a^4(a^2-b)^{2n-3} + f_n^2(a^2-b)^{n-2}\left[-(a^2-b) - a^4\right]$$

$$= f_n^2(a^2-b)^{n-2}\left[-a^4 - a^2 + b\right] + a^4(a^2-b)^{2n-3}$$

และ

$$(l_{n+2}l_{n-2})(l_{n+1}l_{n-1}) - l_n^4 = \left[(a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^{n-2}a^4 + l_n^2\right]\left[(a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^{n-1} + l_n^2\right] - l_n^4$$

$$= (a^{12} - 8a^{10} + 8a^8b + 16a^4b^2 - 32a^6b + 16a^8)(a^2-b)^{2n-3}$$

$$+ l_n^2(a^2-b)^{n-2}(a^8 + 4a^4b - 4a^6 + a^6 - a^4b + 8a^2b - 4b^2 - 4a^2)$$

$$= l_n^2(a^2-b)^{n-2}(a^8 - 3a^6 + 3a^4b + 8a^2b - 4a^2 - 4b^2)$$

$$+ (a^{12} - 8a^{10} + 8a^8b + 16a^4b^2 - 32a^6b + 16a^8)(a^2-b)^{2n-3}$$

(4) โดยใช้สูตรไบเนต (8) จะได้

$$f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\alpha^m-\beta^m)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{m+1}-\beta^{m+1})\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta^2)}\left[\alpha^n\beta^{m+1}+\alpha^{m+1}\beta^n-\alpha^m\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta^m\right]$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\alpha-\beta)\alpha^{m-n}-(\alpha-\beta)\beta^{m-n}\right] = (a^2-b)^n f_{m-n}$$

จากสูตรไบเนต (9) จะได้

$$l_m l_{n+1} - l_n l_{m+1} = (\alpha^m+\beta^m)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-(\alpha^n+\beta^n)(\alpha^{m+1}+\beta^{m+1})$$

$$= \alpha^m\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^m-\alpha^n\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\beta^n$$

$$= (\alpha\beta)^n\left(\alpha^{m-n}\beta+\alpha\beta^{m-n}-\beta^{m-n+1}-\alpha^{m-n+1}\right)$$

$$= -(\alpha\beta)^n\left((\alpha-\beta)\alpha^{m-n}-(\alpha-\beta)\beta^{m-n}\right)$$

$$= -(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)(\alpha^{m-n}-\beta^{m-n})$$

$$= -(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -(a^4+4b-4a^2)(a^2-b)^n f_{m-n}$$

ถ้าแทน n ด้วย $-n$ ในทฤษฎีบท 5 ข้อ (4) และจากสมบัติในทฤษฎีบท 4 จะได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 6 สำหรับทุกจำนวน m และ n จะได้ว่า

$$f_{m+n} = f_{m+1} f_n - (a^2-b) f_m f_{n-1} \tag{12}$$

และ

$$(a^4+4b-4a^2) f_{m+n} = l_{m+1} l_n - (a^2-b) l_m l_{n-1} \tag{13}$$

พิสูจน์ พิจารณา $f_m f_{-n+1} - f_{-n} f_{m+1} = (a^2-b)^{-n} f_{m+n}$

จะได้ $f_{m+n} = (a^2-b)^n\left(f_m f_{-(n-1)} - f_{-n} f_{m+1}\right)$

$$= (a^2-b)^n\left(f_m\left(\frac{-1}{(a^2-b)^{n-1}} f_{n-1}\right)-\left(\frac{-1}{(a^2-b)^n} f_n\right) f_{m+1}\right)$$

$$= -(a^2-b) f_m f_{n-1} + f_n f_{m+1}$$

$$= f_n f_{m+1} - (a^2-b) f_m f_{n-1}$$

และ $l_m l_{-n+1} - l_{-n} l_{m+1} = -(a^4 + 4b - 4a^2)(a^2 - b)^{-n} f_{m+n}$

จะได้ $(a^4 + 4b - 4a^2) f_{m+n} = -(a^2 - b)^n (l_m l_{-(n-1)} - l_{-n} l_{m+1})$

$$= -(a^2 - b)^n \left(l_m \left(\frac{1}{(a^2 - b)^{n-1}} l_{n-1} \right) - \left(\frac{1}{(a^2 - b)^n} l_n \right) l_{m+1} \right)$$

$$= -(a^2 - b) l_m l_{n-1} + l_n l_{m+1}$$

$$= l_n l_{m+1} - (a^2 - b) l_m l_{n-1}$$

จากทฤษฎีบท 3 จะได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 7 สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะได้ว่า

$$f_n l_n = f_{2n}$$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนต จะได้ $$f_n l_n = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)(\alpha^n + \beta^n) = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = f_{2n}$$

ทฤษฎีบท 8 สำหรับทุกจำนวนเต็ม m และ n จะได้ว่า $f_n l_m = f_{n+m} + (a^2 - b)^m f_{n-m}$

พิสูจน์ โดยสูตรไบเนต จะได้

$$f_n l_m = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)\left(\alpha^m + \beta^m \right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left[\alpha^{n+m} - \beta^{n+m} + \alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n \right]$$

$$= \frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+m}}{\alpha - \beta} + (\alpha\beta)^m \left(\frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha - \beta} \right)$$

$$= f_{n+m} + (a^2 - b)^m f_{n-m}$$

ทฤษฎีบท 9 สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะได้

$$l_{n+1} + \left(\frac{a^2}{2} - b \right) l_{n-1} = \left(\frac{a^6}{2} + 2a^2 b - 2a^4 \right) f_{n-1} \qquad (14)$$

และ $$2l_n - a^2 l_{n-1} = (a^4 + 4b - 4a^2) f_{n-1} \qquad (15)$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$l_{n-1} + l_{n+1} = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$$

$$= \alpha^{n-1}\left[\left(\frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right)^2 + 1\right] + \beta^{n-1}\left[\left(\frac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right)^2 + 1\right]$$

$$= \left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4} + 1\right)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) + \left(\frac{2a^2\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{4}\right)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$$

$$= \left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4} + 1\right) l_{n-1} + \left(\frac{a^6 + 4a^2b - 4a^4)}{2}\right) f_{n-1}$$

จะได้

$$l_{n-1} + l_{n+1} - \left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4} + 1\right) l_{n-1} = \left(\frac{a^6 + 4a^2b - 4a^4}{2}\right) f_{n-1}$$

$$l_{n+1} + \left(-\frac{a^2}{2} - b + a^2\right) l_{n-1} = \left(\frac{a^6}{2} + 2a^2b - 2a^4\right) f_{n-1}$$

$$l_{n+1} + \left(\frac{a^2}{2} - b\right) l_{n-1} = \left(\frac{a^6}{2} + 2a^2b - 2a^4\right) f_{n-1}$$

สำหรับสมการ (15) พิจารณา

$$l_{n-1} + l_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^n + \beta^n$$

$$= \alpha^{n-1}(1 + \alpha) + \beta^{n-1}(1 + \beta)$$

$$= \alpha^{n-1}\left(1 + \frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right) + \beta^{n-1}\left(1 + \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right)$$

$$= l_{n-1}\left(1 + \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^4 + 4b - 4a^2}{2}\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= l_{n-1}\left(1 + \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^4 + 4b - 4a^2}{2} f_{n-1}$$

จะได้

$$l_{n-1} + l_n = \frac{a^4 + 4b - 4a^2}{2} f_{n-1} + l_{n-1}\left(1 + \frac{a^2}{2}\right)$$

$$2l_n - a^2 l_{n-1} = (a^4 + 4b - 4a^2) f_{n-1}$$

ทฤษฎีบท 10 สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะได้ว่า

$$4f_{n+1} + (2a^4 + 4b - 4a^2)f_{n-1} = 2a^2 l_{n-1} \tag{16}$$

และ

$$2f_n - a^2 l_{n-1} = l_{n-1} \tag{17}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
f_{n-1} + f_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n-1}(1+\alpha^2) - \beta^{n-1}(1+\beta^2)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{n-1}(\frac{2a^4 + 2a^2\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2} + 4b - 4a^2}{4} + 1) \\
&\quad - \beta^{n-1}(\frac{2a^4 - 2a^2\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2} + 4b - 4a^2}{4} + 1)] \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4} + 1\right)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \frac{a^2\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})\right] \\
&= \left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4} + 1\right)f_{n-1} + \frac{a^2}{2}l_{n-1}
\end{aligned}$$

จะได้

$$f_{n-1} + f_{n+1} = \frac{a^2}{2}l_{n-1} + \left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4} + 1\right)f_{n-1}$$

$$f_{n+1} + \left(\frac{2a^4 + 4b - 4a^2}{4}\right)f_{n-1} = \frac{a^2}{2}l_{n-1}$$

$$4f_{n+1} + \left(2a^4 + 4b - 4a^2\right)f_{n-1} = 2a^2 l_{n-1}$$

สำหรับสมการ (17) พิจารณา

$$\begin{aligned}
f_{n-1} + f_n &= \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n-1}(1+\alpha) - \beta^{n-1}(1+\beta)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n-1}\left(1 + \frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right) - \beta^{n-1}\left(1 + \frac{a^2 + \sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\left(\frac{a^2}{2}+1\right)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \left(\frac{\sqrt{a^4 + 4b - 4a^2}}{2}\right)(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\right]$$

$$= \left(\frac{a^2}{2}+1\right) f_{n-1} + \frac{1}{2} l_{n-1}$$

จะได้

$$f_{n-1} + f_n = \frac{l_{n-1}}{2} + \left(\frac{a^2}{2}+1\right) f_{n-1}$$

$$f_n - \frac{a^2}{2} f_{n-1} = \frac{l_{n-1}}{2}$$

$$2 f_n - a^2 f_{n-1} = l_{n-1}$$

ทฤษฎีบท 11 สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะได้ว่า

$$l_n^2 = (a^4 + 4b - 4a^2) f_n^2 + 4(a^2 - b)^n \tag{18}$$

พิสูจน์ จากสูตรไบเนต (8), (9) จะได้

$$f_n^2 = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(a^2 - b)^n}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$(a^4 + 4b - 4a^2) f_n^2 = l_{2n} - 2(a^2 - b)^n \tag{19}$$

และ

$$l_n^2 = (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + 2(a^2 - b)^n = l_{2n} + 2(a^2 - b)^n \tag{20}$$

นำสมการ (20) - (19) จะได้

$$l_n^2 - (a^4 + 4b - 4a^2) f_n^2 = l_{2n} + 2(a^2 - b)^n - l_{2n} + 2(a^2 - b)^n$$

$$= 4(a^2 - b)^n$$

$$l_n^2 = (a^4 + 4b - 4a^2) f_n^2 + 4(a^2 - b)^n$$

ทฤษฎีบท 12 สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จะได้ว่า

$$f_n f_{n+1} = \frac{1}{a^4 + 4b - 4a^2}\left[l_{2n+1} - a^2 (a^2 - b)^n \right] \tag{21}$$

และ

$$l_n l_{n+1} = l_{2n+1} + a^2 (a^2 - b)^n \tag{22}$$

พิสูจน์ โดยใช้สูตรไบเนต จะได้

$$f_n f_{n+1} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-\alpha^n\beta^n(\alpha+\beta)\right] = \frac{1}{a^4+4b-4a^2}\left[l_{2n+1}-a^2(a^2-b)^n\right]$$

และ

$$l_n l_{n+1} = (\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1})+(\beta^{n+1}\alpha^n+\alpha^{n+1}\beta^n) = l_{2n+1}+(\alpha+\beta)(\alpha\beta)^n = l_{2n+1}+a^2(a^2-b)^n$$

สรุปผลการวิจัย

ในบทความฉบับนี้เป็นการนำเสนอลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $f_n = a^2 f_{n-1} + \left(b - a^2\right) f_{n-2}$ และลำดับ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$ ที่มีความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $l_n = a^2 l_{n-1} + \left(b - a^2\right) l_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ และจะมีฟังก์ชันก่อกำเนิดจากสูตรไบเนตสำหรับลำดับทั้งสองและยังให้เอกลักษณ์บางตัวของลำดับ $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ และลำดับ $\{l_n\}_{n=0}^{\infty}$

เอกสารอ้างอิง

Bilgici, G. (2014). New generalization of Fibonacci and Lucus sequences. *Applied Mathematical Sciences*, *29(8)*, 1429-1437.

Edson, M. and Yayenie, O. (2009). A new generalization of Fibonacci sequences and extended binet formula. *Intergers*, *9*, 639-654.

Edson, M., Lewis, S. and Yayenie, O. (2011). The k-Periodic Fibonacci sequences and extended binet formula. *Intergers*, *11*, 739-751.

Falcon, S. and Plaza, A. (2007).The k-Fibonacci sequence and pascal 2- triangle. *Chaos, Solitons and Fractals, 33*, 38-49.

Horadam, A.F. (1961). A generalized of Fibonacci sequences. *Amer. Math. Monthly, 68*, 455-459.

Klein, S.T. (1991). Combinatorial Representation of generalized Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, *29*, 124-131.

Melham, R.S. and Shannon, A.G. (1995). A generalization of the Catalan identity and some consequences. *Fibonacci Quarterly*, *33*, 82-84.