

ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดที่สร้างจากกฎสี่เหลี่ยมคางหมูสำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบ ของสมการความร้อนและเงื่อนไขค่าขอบไม่เฉพาะที่

Finite Integration Method Based on a Trapezoid Rule for Solving

Inverse Source Problem for the Heat Equation with a Non-Local Boundary Condition

อารีนา ฮะซานี

Areena Hazanee

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science and Technology,

Prince of Songkla University, Pattani Campus

Received : 27 April 2018

Accepted : 4 September 2018

Published online : 14 September 2018

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาการหาพจน์ต้นกำเนิดความร้อนที่ขึ้นกับเวลาของปัญหาค่าขอบภายใต้เงื่อนไขค่าขอบไม่เฉพาะที่ โดยใช้ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดที่สร้างจากกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมไปข้างหน้าหลัง ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดนี้เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้เทคนิคการประมาณค่าปริพันธ์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n โดยการใช้การประมาณค่าด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูนี้ เมทริกซ์ปริพันธ์ที่ได้จากระเบียบวิธีนี้จะเป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่าง ซึ่งเป็นข้อดีสำหรับการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีนี้เพื่อแก้ปัญหาค่าขอบที่ซับซ้อนต่างๆ ดังเช่นปัญหาค่าขอบ เนื่องจากปัญหาค่าขอบนี้เป็นปัญหาที่มีการตั้งขึ้นอย่างบกพร่องซึ่งเป็นผลให้ผลเฉลยของปัญหานี้ไม่มีเสถียรภาพ กล่าวคือ ค่าคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยที่เกิดขึ้นในค่ารับเข้าของระบบเป็นผลทำให้ผลเฉลยเกิดความคลาดเคลื่อนอย่างมาก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องนำกระบวนการรีกูลาไรเซชันมาประยุกต์ใช้เพื่อทำให้ผลเฉลยมีเสถียรภาพมากขึ้น

คำสำคัญ : สมการความร้อน, ปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง, ปัญหาค่าขอบ, ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัด, กระบวนการรีกูลาไรเซชัน

*Corresponding author. E-mail : areena.h@psu.ac.th

Abstract

This research aims to study an identification of a time-dependent heat source function for an inverse problem with a non-local boundary condition by using a finite integration method based on combining of trapezoid rule and backward differences. This method is a numerical method using an approximation integration technique for solving the n^{th} -order differential equation. By using the trapezoid rule, the integration matrix obtained by using this method is a lower triangular matrix which is an advantage of applying this method to solve the complicated problem such as inverse problems. Since the inverse problem is ill-posed which causes to the instability solution, i.e. the small perturbations in the input data result in large perturbation in the solution, then the regularization is used to solve the ill-posed problem in order to stabilize the solution.

Keywords : heat equation, ill-posed problem, inverse problem, finite integration method, regularization

บทนำ

ในปัจจุบัน การศึกษาปัญหาผกผัน (inverse problem) เป็นปัญหาที่นักวิจัยหลายสาขาได้ให้ความสนใจและมีการนำไปประยุกต์อย่างกว้างขวาง (Beck *et al.*, 1985; Tikhonov & Arsenin, 1977; Blackwell, 1981; Dehghan, 2001; Shamsi & Dehghan, 2010; Tian *et al.*, 2011) เช่น กระบวนการหล่อเย็นในทางวิศวกรรม พลศาสตร์ของไหลในทางการแพทย์ หรือกระบวนการหาความร้อนในทางฟิสิกส์ เป็นต้น ปัญหาหนึ่งที่ได้รับคามสนใจ คือ สมการความร้อน (heat equation) ซึ่งเป็นปัญหาผกผันที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากในทางวิทยาศาสตร์ประยุกต์ (Farcas & Lesnic, 2006; Hasanov, 2007; Johansson & Lesnic, 2007; Yan *et al.*, 2008; Yang *et al.*, 2010; Xiong *et al.*, 2011; Ismailov & Çiçek, 2016) ดังตัวอย่างของกระบวนการละลาย/กระบวนการหล่อเย็น ความร้อนของคลื่นไมโครเวฟ กระบวนการเกิดปฏิกิริยาทางเคมี หรือในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมการความร้อนที่ไม่ทราบค่าความร้อนต้นกำเนิด (heat source)

สำหรับสมการความร้อนของปัญหาผกผัน มีตัวแปรอยู่สองชนิดคือ ตัวแปรของระบบ (system parameters) และตัวแปรไม่ทราบค่า (unknown parameters) ในที่นี้ได้ให้ความสนใจกับตัวแปรไม่ทราบค่าของสมการความร้อนที่อาจเป็นได้ทั้งค่าพลังงานความร้อน (heat energy) ฟลักซ์ความร้อน (heat flux) พลังงานความร้อนต้นกำเนิด ค่าขอบ (boundary condition) หรือค่าอนุพันธ์ต่างๆ ของระบบ เป็นต้น เนื่องจากเมื่อแก้ปัญหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่าได้แล้วเราสามารถนำค่าเหล่านี้เติมเต็มให้กับแบบจำลองของระบบได้

การแก้ปัญหาค่าผกผันในหลายๆ งานวิจัยได้ประยุกต์การแก้ปัญหาค่าตัวเลข ซึ่งมีตัวอย่างเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย (Yang, 1999; Dehghan, 2001; Jin & Marin, 2006; Yan *et al.*, 2008; Bin-Mohsin & Lesnic, 2012; Tian *et al.*, 2011; Hazanee *et al.*, 2015; Hussein *et al.*, 2017) เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (finite difference method: FDM), ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (finite element method: FEM), ระเบียบวิธีสมาชิกค่าขอบ (boundary element method: BEM), ระเบียบวิธีผลเฉลยหลักมูล (method of fundamental solution: MFS) เป็นต้น จากการศึกษาวิจัยต่างๆ ในการประยุกต์การคำนวณเชิงตัวเลขกับการแก้ปัญหาค่าผกผัน พบว่าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ชื่อว่า ระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัด (Finite integration method: FIM) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์วิธีใหม่ที่นำเสนอวิธีหนึ่ง ซึ่งระเบียบวิธีนี้ได้ถูกนำเสนอเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

(ของปัญหาตรง) โดย P. H. Wen และคณะ (Wen *et al.*, 2013) และจากการค้นคว้าเกี่ยวกับปัญหาผกผัน พบว่า เมื่อเร็วๆ นี้ R. Lesmana และคณะ (Lesmana *et al.*, 2017) และ A. Hazanee (Hazanee, 2017) ได้นำ FIM ไปประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันของสมการความร้อนภายใต้เงื่อนไขค่าขอบบนอยมันน์ (neumann boundary conditions)

เพื่อให้สามารถหาผลเฉลยของปัญหาผกผันได้ เงื่อนไขของฟังก์ชันรับเข้า (input data/function) จะถูกนำมาพิจารณาเพิ่มอีกหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข เพื่อยืนยันการมีอยู่ (existence) และการเป็นเอกลักษณ์ (uniqueness) ของผลเฉลยซึ่งเงื่อนไขนี้จะถูกเรียกว่าเงื่อนไขครอบคลุมการคำนวณ (over-determination condition) หรือเงื่อนไขเพิ่มเติม (additional condition) ในระบบสมการความร้อน เงื่อนไขที่เพิ่มเข้ามามักเป็นเงื่อนไขที่ได้จากการทดลอง (experimental data) เช่น ข้อมูลของพลังงานอุณหภูมิ ณ จุดใดจุดหนึ่ง (fixed point temperature) พลังงานความร้อนโดยรวมของระบบ เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามปัญหาผกผันเป็นปัญหาที่มีการตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง (ill-posed, improperly-posed, incorrectly-posed) (Petrov & Sizikov, 2005) ในปี ค.ศ. 2008 S. I. Kabanikhin (Kabanikhin, 2008) ได้จัดทำรายงานเชิงสำรวจ (survey paper) เกี่ยวกับปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง ซึ่งพบว่าการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องเริ่มต้นในช่วงประมาณต้นศตวรรษที่ 20 โดย J. Hadamard ได้ให้นิยามของปัญหาประเภทนี้ไว้ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1902 โดยในบทความของ Kabanikhin ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะถูกเรียกว่าปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างดี (well-posed) ก็ต่อเมื่อผลเฉลยของปัญหานั้นสอดคล้องกับสมบัติ 3 ข้อ ได้แก่ การมีอยู่จริงของผลเฉลย (existence), การเป็นเอกลักษณ์ของผลเฉลยหรือการมีผลเฉลยเพียงค่าเดียวเท่านั้น (uniqueness), และการมีเสถียรภาพของผลเฉลย (stability) ซึ่งหากปัญหาทางคณิตศาสตร์ใดที่ไม่สอดคล้องกับสมบัติทั้ง 3 นี้ ปัญหานั้นจะถูกเรียกว่า ปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง

จากการศึกษาพบว่า ปัญหาผกผันส่วนใหญ่เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องโดยขาดสมบัติการมีเสถียรภาพของผลเฉลย การหาผลเฉลยของปัญหาผกผันนั้น นอกจากเป็นการพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ร่วมกับเงื่อนไขค่าขอบและเงื่อนไขค่าเริ่มต้นแล้ว ยังจะต้องพิจารณาร่วมกับเงื่อนไขเพิ่มเติมอีกหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งเงื่อนไข ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมนี้ถูกตั้งขึ้นภายใต้เงื่อนไขการมีอยู่จริงและการเป็นเอกลักษณ์ของผลเฉลย เมื่อเร็วๆ นี้ Hazanee และคณะ (Hazanee *et al.*, 2013) ได้ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันที่น่าสนใจปัญหาหนึ่งที่สามารถนำไปประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาผกผันอื่นได้ (Hazanee & Lesnic, 2014) โดยปัญหาดังกล่าวเป็นการหาตัวแปรไม่ทราบค่าของพจน์ต้นกำเนิด $F(x, t) := r(t)f(x, t) \in C(D_T)$ และพลังงานความร้อน $u(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T})$ เมื่อ $D_T = (0, 1) \times (0, T]$ ของสมการความร้อน พร้อมเงื่อนไขต่างๆ ต่อไปนี้

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t), & 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t), \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \int_0^1 u(x, t) dx = E(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

เมื่อ $f(x, t), u_0(x), E(t)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ และ $\alpha \neq 0$ เป็นค่าคงตัวที่กำหนดให้ โดย $f(x, t)$ แทนฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ความร้อนต้นกำเนิด $u_0(x)$ แทนพลังงานความร้อนเริ่มต้น และ $E(t)$ แทนพลังงานความร้อนรวมทั้งระบบ สำหรับปัญหา (1) ถ้าระบบทราบค่าของ $F(x, t)$ นั่นคือระบบต้องการทราบเพียงค่าของ $u(x, t)$ เท่านั้น เราจะเรียกปัญหาเช่นนี้ว่า ปัญหาตรง (direct

problem, forward problem) และสำหรับกรณีที่ฟังก์ชัน $F(x, t)$ เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า นั่นคือระบบไม่ทราบค่าทั้ง $u(x, t)$ และ $F(x, t)$ เราจะเรียกปัญหาเช่นนี้ว่า ปัญหาผกผัน (indirect problem, inverse problem) จากการศึกษาพบว่าผลเฉลยของปัญหาผกผัน (1) เป็นผลเฉลยที่มีอยู่จริงและมีเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น (Hazanee et al., 2013) แต่ยิ่งขาดสมบัติความเสถียร กล่าวคือ เมื่อค่ารับเข้าของระบบซึ่งอาจหมายถึงผลที่ได้จากการทดลองมีค่าคลาดเคลื่อน (error) ซึ่งส่วนใหญ่มักเกิดขึ้นอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ และค่าคลาดเคลื่อนนี้เป็นผลให้ผลเฉลยของระบบลู่ออก (converge) นั่นคือผลเฉลยที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นอย่างมาก

จากปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่องที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ปัญหาผกผันที่ผลเฉลยไม่มีความเสถียรทำให้คำตอบของปัญหาไม่มีความแม่นยำ ดังนั้นจึงต้องใช้กระบวนการรีกูลาไรเซชัน (regularization) ทำให้สามารถหาผลเฉลยได้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด และในการวิจัยนี้เราสนใจกระบวนการรีกูลาไรเซชันของทิกคอฟ (Tikhonof's regularization) ซึ่งเป็นการใช้เทคนิคการหาค่าต่ำสุด (minimization) ของฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function) ที่ได้จากกระบวนการกำลังสองน้อยสุดเชิงเส้น (linear least-square) ของระบบที่สนใจ โดยจะต้องเลือกค่าพารามิเตอร์รีกูลาไรเซชัน (regularization parameter) ที่เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ ซึ่งค่าพารามิเตอร์นี้มีความสำคัญอย่างมากในการหาค่าผลเฉลยเพื่อให้ความเสถียรและความแม่นยำ ทั้งนี้ในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์รีกูลาไรเซชันนี้สามารถคำนวณได้ด้วยวิธีต่างๆ เช่น วิธีของเส้นโค้ง L (L-curve criterion) (Hansen, 2001), หลักวิธีความแตกต่าง (discrepancy principle) (Morozov, 1966), GCV (Yan et al., 2008) เป็นต้น แต่เนื่องด้วยการศึกษาวิจัยนี้เป้าหมายหนึ่งคือการนำ FIM ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาผกผัน ดังนั้นสำหรับงานวิจัยนี้เราจะใช้วิธีการลองผิดลองถูก (trial and error) ในการหาค่าพารามิเตอร์รีกูลาไรเซชันที่เหมาะสม

จากการศึกษางานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับแก้ปัญหาค่าผกผันของสมการความร้อน พบว่ามีเพียงสองงานวิจัยเท่านั้นที่นำ FIM ไปประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันที่ไม่ทราบค่าพจน์ต้นกำเนิด โดยงานวิจัยของ Lesmana และคณะ (Lesmana et al, 2017) ประยุกต์ใช้ FIM ร่วมกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรง (the direct numerical method) ซึ่งระเบียบวิธีนี้เป็นเทคนิคหนึ่งในการหาผลเฉลยของปัญหาผกผัน (Xiangtuan et al., 2010) และงานวิจัยของ A. Hazanee (Hazanee, 2017) เป็นการนำ FIM มาประยุกต์ใช้ร่วมกับกระบวนการรีกูลาไรเซชันของทิกคอฟ แต่อย่างไรก็ตาม งานวิจัยทั้งสองเป็นการศึกษาปัญหาผกผันภายใต้เงื่อนไขค่าขอบบนยอมมั่น ในขณะที่ปัญหาผกผัน (1) สนใจศึกษาปัญหาผกผันภายใต้เงื่อนไขค่าขอบไม่เฉพาะที่ (nonlocal boundary condition) คือ $u(0, t) = u(1, t), \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = 0, \alpha > 0$ ซึ่งมักพบในปัญหาความร้อนชีวภาพ (bioheat equation) (Hazanee & Lesnic, 2014)

การนำ FIM มาประยุกต์ใช้ร่วมกับปัญหาผกผัน เกิดขึ้นจากการศึกษางานวิจัยของ P. H. Wen และคณะ (Wen et al., 2013) ซึ่งเป็นการศึกษาการประยุกต์ระเบียบวิธีการประมาณค่าปริพันธ์ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาดตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n ด้วย FIM มีข้อดีคือพิจารณาการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่งเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น แต่สามารถนำมาประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ n ได้ ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงความยุ่งยากของการหาผลเฉลยของอนุพันธ์อันดับต่างๆ และเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่งนี้เป็นเมทริกซ์ที่ไม่ขึ้นกับฟังก์ชันจึงสามารถนำมาประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันใดๆ ได้ โดยไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นพิจารณาจากการปริพันธ์ของฟังก์ชันนั้นๆ ทั้งนี้ FIM ยังสามารถนำมาประยุกต์เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้อีกด้วย ในงานวิจัยของ P.H. Wen และคณะ ยังได้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ โดยนำเทคนิคการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) มาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนการคำนวณเชิงเวลา ในขณะที่ A. Hazanee (Hazanee, 2018) นำระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหน้า (forward difference method) มาประยุกต์ใช้ใน

ขั้นตอนการคำนวณเชิงเวลา สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสองมิติด้วย FIM ได้มีการศึกษาโดย M. Li และคณะ (Li *et al.*, 2015) การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธี FIM ทั้งสามบทความที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นเป็นการศึกษาการใช้ฟังก์ชันในการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ 2 แบบคือ การนำวิธีการประมาณค่าปริพันธ์เชิงเส้น (ordinary linear approximation approach : OLA) ที่ใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoid rule) และอีกแบบคือการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันฐานหลักเรเดียล (radial basis function : RBF) ในปี ค.ศ.2016 M. Li และคณะ (Li *et al.*, 2016) ได้พัฒนาวิธีการประมาณค่าปริพันธ์โดยการนำกฎของซิมป์สัน (Simpson's rule), การปริพันธ์ของนิวตัน-โคตส์ (Newton-Cotes integral) และการประมาณค่าในช่วงลากรานจ์ (Lagrange interpolation) มาประยุกต์รวมกันเพื่อสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ ถึงแม้ว่าเมทริกซ์ปริพันธ์สามารถสร้างได้หลายวิธีแต่จากการศึกษาพบว่า การสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ด้วยวิธี OLA เป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อนและเมทริกซ์ปริพันธ์ที่ได้เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่าง ซึ่งทำให้มีความง่ายในการนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ และให้ค่าความคลาดเคลื่อนไม่ต่างแตกต่างกันมากเมื่อเทียบกับวิธีการประมาณค่าปริพันธ์วิธีอื่นๆ ดังนั้น FIM(OLA) จึงเป็นระเบียบวิธีที่น่าสนใจในการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่างๆ ที่มีขั้นตอนซับซ้อนโดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับปัญหาผกผันซึ่งเป็นปัญหาที่มีค่าไม่ทราบมากกว่าหนึ่งค่า และจากการศึกษาเบื้องต้นพบว่า การนำ FIM(OLA) มาประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหน้าดังที่นำเสนอใน A. Hazanee (2018) อาจทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นที่เมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่ากำหนด (determinant) เป็นศูนย์ เนื่องจากสมาชิกในแถวแรกของเมทริกซ์ปริพันธ์เป็นศูนย์หมด แต่หากนำ FIM(OLA) มาประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหลัง (backward difference method) ดังที่นำเสนอใน A. Hazanee (2017) ทำให้สามารถหลีกเลี่ยงการเกิดเมทริกซ์เอกฐานของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ได้

งานวิจัยนี้ นำเสนอการนำระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดที่สร้างจากกฎสี่เหลี่ยมคางหมูพร้อมด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหลังมาแก้ปัญหาผกผัน (1) ซึ่งเป็นปัญหาของสมการความร้อนที่ไม่ทราบค่าพจน์ต้นกำเนิดภายใต้เงื่อนไขค่าขอบไม่เฉพาะที่ จากการศึกษาก่อนหน้าปัญหาผกผันและ FIM พบว่ายังไม่มียานวิจัยใดที่นำ FIM มาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาผกผันภายใต้เงื่อนไขค่าขอบไม่เฉพาะที่ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายคือ การนำ FIM มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาผกผัน (1) ร่วมกับกระบวนการรีกูลาไรเซชันเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่มีความเสถียรและแม่นยำขึ้นตามเงื่อนไขที่กำหนด

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้สนใจการหาผลเฉลยของปัญหาผกผัน (1) ด้วยการประยุกต์ใช้ FIM ร่วมกับกระบวนการรีกูลาไรเซชัน FIM ถือว่าเป็นระเบียบวิธีใหม่ที่เพิ่งถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (Wen *et al.*, 2013, Li *et al.*, 2015 & Hazanee, 2018) ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงเป็นการนำเสนอการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ ซึ่งเป็นเมทริกซ์หลักสำคัญในการพิจารณาปัญหาตรงด้วย FIM ทั้งนี้เพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาก่อนนำ FIM มาประยุกต์ใช้กับปัญหาผกผัน

ในการศึกษา FIM จะเริ่มพิจารณาจากการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ที่ได้จากการนำระเบียบวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้ โดยระเบียบวิธีปริพันธ์เชิงตัวเลขที่นำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษานี้คือ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งจะนำมาใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $u(x)$ เมื่อ $x \in \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_N = b\}$ โดยแบ่งเป็น N ช่วงเท่าๆ กัน ดังนั้นการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขคือ $\int_a^b u(x) dx = \Delta x \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1} + \frac{u_N}{2} \right)$ เมื่อ $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ และ $u_i = u(x_i)$

พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x ใดๆ เมื่อ $x \in [a, b]$; $U^{(1)}(x) = \int_a^x u(\xi) d\xi$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขทำให้ได้การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_k เมื่อ $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ดังนี้

$$U^{(1)}(x_k) = \int_a^{x_k} u(\xi) d\xi = \Delta x \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + \frac{u_k}{2} \right) \tag{2}$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ คือ $U^{(1)}(x_k) = \sum_{i=0}^k a_{ki}^{(1)} u_i$ เมื่อ $a_{0i}^{(1)} = 0$ และ $a_{ki}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\Delta x}{2}; & i = 0, k \\ \Delta x; & i = 1, 2, 3, \dots, k-1 \end{cases}$
 ดังนั้นจะได้การประมาณค่าปริพันธ์ในรูปของสมการเมทริกซ์คือ

$$\underline{U}^{(1)} = A^{(1)} \underline{u} \tag{3}$$

เมื่อ $\underline{U}^{(1)} = [\int_a^{x_0} u(\xi) d\xi, \int_a^{x_1} u(\xi) d\xi, \int_a^{x_2} u(\xi) d\xi, \dots, \int_a^{x_N} u(\xi) d\xi]^T$, $u = [u(x_0), u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)]^T$

และ $A^{(1)} = \Delta x$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1/2 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$ โดยเรียกเมทริกซ์ $A^{(1)}$ ว่าเมทริกซ์ปริพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ในการทำงานเดียวกัน พิจารณาการประมาณค่าปริพันธ์ n ชั้นจำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x ใดๆ เมื่อ $x \in [a, b]$;
 $U^{(n)}(x) = \int_a^x \int_a^{\xi_{n-1}} \dots \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi \dots d\xi_{n-2} d\xi_{n-1}$ โดยการประมาณค่าปริพันธ์เชิงตัวเลขทำให้ได้การประมาณค่าปริพันธ์
 จำกัดเขตจากจุด a ถึงจุด x_k ดังนี้

$$U^{(n)}(x_k) = \int_a^{x_k} \int_a^{\xi_{n-1}} \dots \int_a^{\xi_1} u(\xi) d\xi \dots d\xi_{n-2} d\xi_{n-1} = \sum_{i=0}^k a_{ki}^{(n)} u_i \tag{4}$$

การประมาณค่าปริพันธ์ n ชั้นข้างต้น สามารถคำนวณได้จากผลคูณของปริพันธ์อันดับที่หนึ่งจำนวน n ครั้ง (Wen et al., 2013, Li et al., 2015 & Hazanee, 2018) นั่นคือ $A^{(1)} = \underbrace{A^{(1)} \cdot A^{(1)} \cdot A^{(1)} \cdot \dots \cdot A^{(1)}}_{n \text{ ครั้ง}}$ เมื่อกำหนด $A^{(1)} = A$ จะได้ $A^{(n)} = A^n$ ดังนั้นการประมาณค่าปริพันธ์ n ชั้นใดๆ ในรูปของสมการเมทริกซ์สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$U^{(n)}(x_k) = A^{(1)} \underline{u} = A^n \underline{u} \tag{5}$$

จากกระบวนการสร้างเมทริกซ์ปริพันธ์ $A^{(n)}$ ที่ได้กล่าวไปแล้วนั้น ทำให้ได้เมทริกซ์ปริพันธ์ที่เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมล่างซึ่ง
 ถือเป็นข้อดีของการนำ FIM(OLA) ไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษานี้ เราสนใจการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันด้วยการประยุกต์ FIM ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมไปข้างหน้า หลัง พิจารณาสมการความร้อนในปัญหา (1) ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x, t) + r(t)f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \quad (6)$$

ในที่นี้ กำหนดให้ $T > 0$ และแบ่งปริภูมิ x เป็น N ช่วงย่อย และ เวลา t เป็น M ช่วงย่อยเท่าๆ กัน โดยที่ $x \in \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_N = 1\}$, $t \in \{0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_M = T\}$ ดังนั้น เราจะประมาณค่าพลังงานความร้อนด้วย $u(x, t) = u(x_i, t_j) = u^j_i$

พิจารณาสมการความร้อน (6) โดยการประมาณค่าอนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลาด้วยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมไปข้างหน้า นั่นคือ $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t_j) = \frac{1}{\kappa}(u^j(x) - u^{j-1}(x))$ เมื่อ $\kappa = \frac{T}{M}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$ โดยการประมาณค่าฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาทำให้ได้สมการ ODE ดังนี้

$$\frac{1}{\kappa}u^j(x) - \frac{1}{\kappa}u^{j-1}(x) = \frac{d^2u^j}{dx^2}(x) + r^j f^j(x), \quad (7)$$

เมื่อ $u^j(x) := u(x, t_j)$, $r^j f^j := r(t_j)f(x, t_j)$ ดำเนินการปริพันธ์ 2 ชั้นเทียบกับ x ตลอดสมการ (7) จะได้การคำนวณแบบไม่ต่อเนื่อง ดังนี้

$$\frac{1}{\kappa}A^2 \underline{u}^j - \underline{u}^j = \frac{1}{\kappa}A^2 \underline{u}^{j-1} + r^j A^2 \underline{f}^j + c_0 \underline{x} + c_1 \underline{i}, \quad (8)$$

เมื่อ $\underline{u}^j = [u^j_0, u^j_1, u^j_2, \dots, u^j_N]^T$, $\underline{f}^j = [f^j_0, f^j_1, f^j_2, \dots, f^j_N]^T$, $\underline{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, $\underline{i} = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$ และ c_0, c_1 เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการปริพันธ์

ต่อไปเป็นการพิจารณาเงื่อนไขค่าขอบของปัญหา จาก $u(0, t) = u(1, t)$ ได้ว่า $u^j_0 = u^j_N$ นั่นคือ

$$u^j_0 - u^j_N = 0 \quad (9)$$

และเงื่อนไขค่าขอบ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \alpha u(0, t) = 0$ ดำเนินการปริพันธ์เทียบกับ x ตลอดสมการ (7) และพิจารณาที่ $x = 0$ (x_k ที่ $k = 0$) จะได้ว่า

$$\frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^0 a_{0i}^{(1)} u^j_i - \left. \frac{du^j}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^0 a_{0i}^{(1)} u^{j-1}_i + r^j \sum_{i=0}^0 a_{0i}^{(1)} f^j_i + c_0, \quad (10)$$

เนื่องจาก $a_{0i}^{(1)} = 0$ จะได้ว่า $-\frac{du^j}{dx}\Big|_{x=0} = c_0$ ดังนั้น สามารถคำนวณ c_0 ได้จากเงื่อนไขค่าขอบ คือ $c_0 = -\left(\frac{du^j}{dx}\Big|_{x=0}\right) = -(-\alpha u(0, t_j)) = \alpha u(1, t_j) = \alpha u_N^j$ นั่นคือ

$$\alpha u_N^j - c_0 = 0 \tag{11}$$

จากสมการ (8), (9) และ (11) จะได้ ระบบสมการเชิงเส้น $N + 3$ สมการ $N + 3$ ตัวแปร ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{1}{\kappa} A^2 - I & & & & -x & -i \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u^j \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} A^2 u^{j-1} + r^j A^2 f^j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

สำหรับปัญหาตรง เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยการนำเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหา $u(x, 0) = u_0(x)$ ซึ่งเมื่อ $j = 1$ เราสามารถประมาณ $\underline{u}^0 = \underline{u}_0 = [u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_N)]^T$ เพื่อคำนวณหา \underline{u}^1 (u^j เมื่อ $j = 1$) จากนั้นจึงพิจารณาการคำนวณหาค่า $\underline{u}^2, \underline{u}^3, \dots, \underline{u}^M$ โดยกำหนด $j = 2, 3, \dots, M$ ตามลำดับ นั่นคือ สามารถคำนวณหาค่า \underline{u}^M ที่เป็นผลเฉลยของปัญหาตรงนี้ได้ กระบวนการคำนวณค่าซ้ำๆ เช่นนี้เรียกว่า กระบวนการทำซ้ำ (iterative method)

สำหรับปัญหาผกผัน เราจะพิจารณาเงื่อนไขเพิ่มเติมของปัญหา $\int_0^1 u(x, t) dx = E(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันพลังงานความร้อนรวมทั้งระบบ ร่วมกับระบบสมการ (12) โดยพิจารณาฟังก์ชัน $E(t)$ ด้วย $\int_0^1 u(x, t_j) dx = \int_0^1 u^j(x) dx = E(t_j) =: E^j$ ซึ่งสามารถแปลงเป็นการคำนวณแบบไม่ต่อเนื่องได้ ดังนี้

$$\sum_{i=0}^N a_{Ni}^{(1)} u_i^j = E^j \tag{13}$$

เมื่อ u_i^j ได้จากการแก้ระบบสมการเชิงเส้น (12) ด้วยการกำหนดพจน์ไม่ทราบค่าด้วย $r^j = r_0^j := r_0(t_j)$ เมื่อ $r_0(t_j)$ เป็นค่าเริ่มต้น (initial guess) ของ $r(t_j)$ ซึ่งเป็นพจน์ที่ต้องกำหนด ผลเฉลย $r(t)$ และ $u(x, t)$ ของปัญหาผกผัน (1) สามารถคำนวณได้จากการใช้เทคนิคการหาค่าต่ำสุด (minimization) สำหรับกระบวนการรีกูลาไรเซชันของทิกคอนอฟด้วยฟังก์ชันเป้าหมาย ดังนี้

$$\Gamma := \sum_{j=1}^M \left[\sum_{i=0}^N a_{Ni}^{(1)} u_i^j - E^j \right]^2 + \lambda \sum_{j=1}^M \left[\frac{T}{M} (r^j - r^{j-1}) \right]^2 \tag{14}$$

เมื่อ λ เป็นพารามิเตอร์ของกระบวนการรีกูลาไรเซชันที่ต้องกำหนดเพื่อการคำนวณและ $\lambda > 0$ โดยพจน์ $\sum_{j=1}^M \left[\sum_{i=0}^N a_{Ni}^{(1)} u_i^j - E^j \right]^2$ เป็นส่วนตกค้างที่ได้จาก (14) และพจน์ $\lambda \sum_{j=1}^M \left[\frac{T}{M} (r^j - r^{j-1}) \right]^2$ จะถูกเรียกว่าพจน์รีกูลาไรเซชันที่พิจารณาจากอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของตัวแปรไม่ทราบค่า เราจะเรียกกระบวนการรีกูลาไรเซชันที่มีพจน์รีกูลาไรเซชันเช่นนี้ว่า กระบวนการรีกูลาไรเซชันอันดับที่หนึ่ง (the first-order regularization) (Farcas & Lesnic, 2006) กระบวนการรีกูลาไรเซชันจะขึ้นอยู่กับ การเลือกค่า λ ซึ่งมีวิธีการเลือกต่างๆ มากมายดังที่กล่าวมาแล้วในบทนำ แต่ในการวิจัยนี้ เรามีวัตถุประสงค์เพื่อทดสอบการใช้ FIM(OLA) ร่วมกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องไปข้างหลังเพื่อแก้ปัญหาผกผัน ดังนั้นในที่นี้จะใช้วิธีการลองผิดลองถูกในการ

กำหนดค่า λ เราสามารถสังเกตได้ว่า ถ้า $\lambda = 0$ แล้วฟังก์ชันเป้าหมาย (14) จะเป็นการพิจารณาค่าต่ำสุดของส่วนตกค้าง $|\sum_{i=0}^N a_{Ni}^{(1)} u_i^j - E^j|$ ของ (13) นั่นคือ การกำหนด $\lambda = 0$ เป็นการละการพิจารณาพจน์รีกูลาไรเซชัน หรือกล่าวได้ว่าเป็นการไม่นำกระบวนการรีกูลาไรเซชันมาพิจารณานั้นเอง สำหรับการวิจัยนี้ เราจะใช้กล่องเครื่องมือในโปรแกรม MATLAB ชื่อ fminunc สำหรับการแก้ปัญหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (14) เครื่องมือนี้เป็นการประมาณค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปรที่ไม่ถูกควบคุม (unconstrain)

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาผกผัน (1) โดยใช้ FIM ร่วมกับกระบวนการรีกูลาไรเซชันของ ทิคอนอฟ ตัวอย่างเชิงตัวเลขที่นำมาศึกษานี้ได้จากตัวอย่างเชิงตัวเลขของการวิจัยของ A. Hazanee และคณะ (Hazanee et al., 2013) ซึ่งได้ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาผกผัน (1) ด้วย BEM ในที่นี้ เราจะทดสอบความแม่นยำของผลเฉลยของปัญหาด้วยรากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง (root mean square error: RMSE) ดังนี้

$$\text{RMSE}(r) = \sqrt{\frac{T}{M} \sum_i (\text{Exact}(t_i) - \text{Approx}(t_i))^2}, \text{RMSE}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (\text{Exact}(x_i) - \text{Approx}(x_i))^2} \quad (15)$$

เมื่อ $\text{Exact}(t_i)$, $\text{Exact}(x_i)$ แทนค่าจริงของระบบ และ $\text{Approx}(t_i)$, $\text{Approx}(x_i)$ แทนค่าประมาณของระบบ
พิจารณาการหาผลเฉลยของปัญหาผกผัน (1) ด้วยการกำหนดฟังก์ชันต่างๆ ดังนี้

$$u(x, 0) = u_0 = 1 + x - x^2, f(x, t) = (3 + x - x^2)e^{-t}, \int_0^1 u(x, t) dx = E(t) = \frac{7e^t}{6} \quad (16)$$

และกำหนดฟังก์ชันค่าจริง คือ

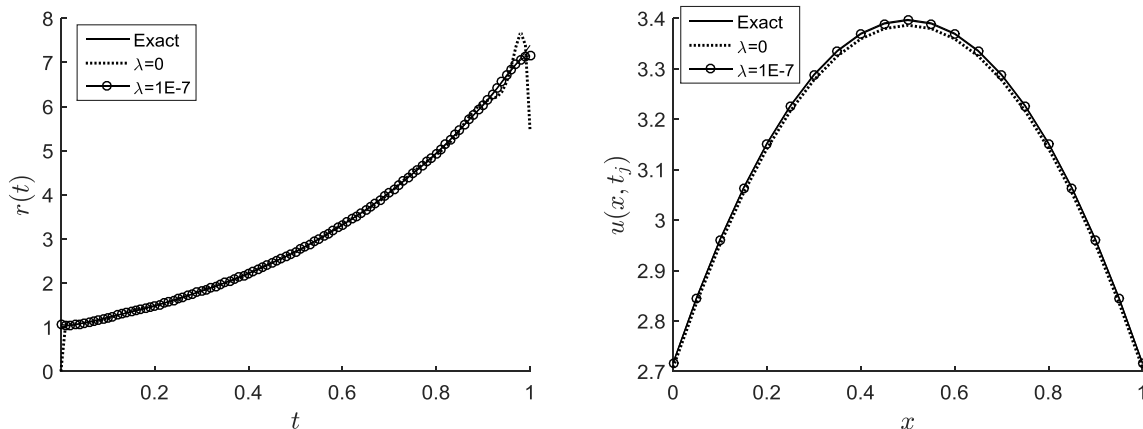
$$u(x, t) = (1 + x - x^2)e^t, r(t) = e^{2t} \quad (17)$$

เราเริ่มต้นพิจารณาปัญหานี้ด้วยการศึกษาปัญหาตรงหรือศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันด้วยการกำหนด $\lambda = 0$ ผลการทดสอบปัญหาเบื้องต้นนี้ได้เมื่อกำหนด $M, N \in \{20, 40, 60, 80, 100\}$ ได้ค่าคลาดเคลื่อน RMSE แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงค่า RMSE ของ $u(x, 1)$ สำหรับปัญหาตรง เมื่อกำหนด $M, N \in \{20, 40, 60, 80, 100\}$

M	20	40	60	80	100
N	20	40	60	80	100
RMSE(u)	2.685E-2	1.356E-2	9.070E-3	6.813E-3	5.456E-3
M	20	40	60	80	100
N	100	100	100	100	100
RMSE(u)	2.701E-2	1.359E-2	9.079E-3	6.816E-3	5.456E-3
M	100	100	100	100	100
N	20	40	60	80	100
RMSE(u)	5.425E-3	5.445E-3	5.451E-3	5.455E-3	5.456E-3

จากตารางที่ 1 พบว่าการกำหนด $M = 100$ และ $N = 20$ เป็นการกำหนดที่เหมาะสมที่สุด ดังนั้นในการพิจารณาปัญหาผกผันนี้ เราจะกำหนด $M = 100$, $N = 20$ และค่าเริ่มต้น $r_0 = 0$



ภาพที่ 1 แสดงผลเฉลย $r(t)$ และ $u(x, 1)$ เมื่อกำหนด $M = 100$, $N = 20$, $r_0 = 0$, $p = 0\%$ และ $\lambda \in \{0, 10^{-5}\}$

จากการพิจารณาค่าเหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมาย (14) เมื่อกำหนด $\lambda = 0$ ได้ผลลัพธ์ $r(t)$ และ $u(x, 1)$ แสดงดังภาพที่ 1 ด้วยเส้น (●●●●) ซึ่งจะเห็นได้ว่า ผลลัพธ์ $r(t)$ ในช่วง $0 < t < 0.8$ เข้าสู่ค่าจริง แต่ในช่วงเวลาเริ่มต้น ($t \approx 0$) และช่วงท้าย ($0.8 < t < 1$) พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้ลู่ออก ค่าคลาดเคลื่อน RMSE ของผลลัพธ์นี้แสดงดังตารางที่ 2 คือ $RMSE(r) = 2.347E-1$ ดังนั้น เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เข้าสู่ค่าจริงตลอดช่วงเวลา $0 \leq t \leq 1$ เรายังนำพจน์ริวกูลาไรเซชันมาพิจารณา ($\lambda \neq 0$) โดยใช้วิธีการลองผิดลองถูกหาพารามิเตอร์ริวกูลาไรเซชันที่เหมาะสมเมื่อ $\lambda \in \{10^{-9}, 10^{-8}, \dots, 10^{-2}\}$ และพบว่าการศึกษาด้วย $\lambda = 10^{-7}$ ให้ผลการลู่เข้าที่ดีที่สุด ดังแสดงในภาพที่ 1 ด้วยเส้น (○○○○) และมีค่าคลาดเคลื่อน $RMSE(r) = 2.784E-2$ สำหรับการคำนวณค่าอนุกรม $u(x, 1)$ จากผลลัพธ์ $r(t)$ ที่ได้จากการคำนวณด้วยพารามิเตอร์ริวกูลาไรเซชัน $\lambda \in \{0, 10^{-7}\}$ พบว่า $u(x, 1)$ ลู่เข้าสู่ค่าจริงทั้ง 2 การประมาณ การลู่เข้าของผลลัพธ์ $u(x, 1)$ ทั้งสองค่านี้เป็นสิ่งที่

คาดหวังได้ เนื่องจากปัญหาผกผันที่ศึกษานี้ (กรณีไม่ทราบค่า $r(t)$ และ $u(x, t)$) เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง แต่สำหรับปัญหาตรง (กรณีทราบค่า $r(t)$) ของปัญหานี้จะเป็นปัญหาที่ถูกตั้งขึ้นอย่างดี

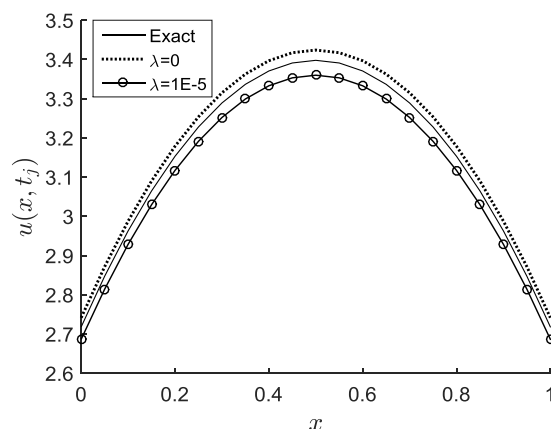
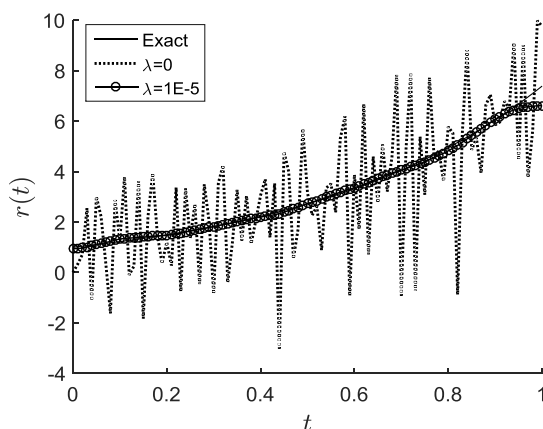
ตารางที่ 2 แสดงค่า RMSE ของ $r(t)$ และ $u(x, t)$ เมื่อกำหนด $M = 100$, $N = 20$, $r_0 = 0$ และ $p \in \{0\%, 1\%, 3\%, 5\%\}$ สำหรับปัญหาผกผัน

p	0%	0%	1%	1%	3%	5%
λ	0	10^{-7}	0	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
RMSE(r)	2.347E-1	2.784E-2	2.025	1.341E-1	2.841E-1	3.029E-1
RMSE(u)	1.118E-2	1.877E-3	2.544E-2	3.583E-2	7.934E-2	6.869E-2

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า ปัญหาผกผัน (1) เป็นปัญหาที่ตั้งขึ้นอย่างบกพร่อง โดยระบบที่ศึกษานี้ไม่มีความเสถียร นั่นคือ เมื่อไม่มีการรบกวน ผลเฉลยของระบบจะลู่เข้า แต่เมื่อระบบเกิดการรบกวนเพียงเล็กน้อย เป็นผลให้ผลเฉลยของระบบลู่ออก ดังนั้น ต่อจากนี้เป็นการพิจารณาเสถียรภาพของระบบด้วยการเพิ่มค่ารบกวน (noise) เข้าสู่ระบบ ดังนี้

$$\sum_{i=0}^N a_{Ni}^{(1)} u_i^j = E^j + \varepsilon^j, \tag{18}$$

เมื่อ ε^j แทนค่ารบกวนที่เพิ่มเข้าเมื่อเวลา t_j ใดๆ โดยการสุ่มจากการกระจายตัวปกติเกาส์เซียน (Gaussian normal distribution) ด้วยค่ากลาง (mean) เป็นศูนย์ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation, σ) ที่คำนวณด้วยเปอร์เซ็นต์ของการรบกวนและค่ามากที่สุดของพลังงานรวม นั่นคือ $\sigma = p \times \max_j |E(t_j)|$ และสำหรับการวิจัยนี้ เราสนใจเปอร์เซ็นต์ของการรบกวนที่ $p \in \{1\%, 3\%, 5\%\}$



ภาพที่ 2 แสดงผลเฉลย $r(t)$ และ $u(x, t)$ เมื่อกำหนด $M = 100$, $N = 20$, $r_0 = 0$, $p = 1\%$ และ $\lambda \in \{0, 10^{-5}\}$

พิจารณาเมื่อระบบถูกรบกวนเพียงเล็กน้อย นั่นคือ $p = 1\%$ จะได้ผลลัพธ์ $r(t)$ และ $u(x, t)$ แสดงดังภาพที่ 2 ซึ่งจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า เมื่อกำหนด $\lambda = 0$ แสดงผลลัพธ์ด้วยเส้น (●●●●) ค่าประมาณ $r(t)$ ลู่ออกอย่างเห็นได้ชัดเจนโดยมีค่าคลาดเคลื่อน RMSE แสดงดังตารางที่ 2 ดังนั้น เราจึงนำกระบวนการรีกูลาไรเซชันมาทำให้ระบบมีเสถียรภาพมากขึ้น ในที่นี้เรากำหนด $\lambda = 10^{-5}$ ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่มีความเสถียรขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 2 ด้วยเส้น (○○○○) และมีค่าคลาดเคลื่อน $RMSE(r) = 1.341E-1$ ซึ่งน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ได้เมื่อละการพิจารณาพจน์รีกูลาไรเซชัน เมื่อเพิ่มค่ารบกวนให้ระบบมากขึ้น นั่นคือ $p \in \{3\%, 5\%\}$ พบว่า กระบวนการรีกูลาไรเซชันพร้อมด้วยการกำหนด $\lambda = 10^{-5}$ ทำให้ระบบมีเสถียรภาพมากขึ้น โดยพิจารณาได้จากค่าคลาดเคลื่อน $RMSE(r)$ ที่แสดงในตารางที่ 2

จากที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นว่า ตัวอย่างที่นำมาศึกษานี้ได้จากตัวอย่างเชิงตัวเลขของการวิจัยของ A. Hazanee และคณะ (Hazanee et al., 2013) ซึ่งเป็นการศึกษาการไหลเฉลยของปัญหาผกผัน (1) ด้วย BEM ร่วมกับกระบวนการรีกูลาไรเซชัน แต่ขั้นตอนวิธีที่ได้ในการคำนวณหาผลเฉลยแตกต่างกัน นั่นคือ งานวิจัยดังกล่าวไม่นำเทคนิคการหาค่าต่ำสุดมาประยุกต์ใช้ ดังนั้น ด้วยขั้นตอนวิธีที่ต่างกันทำให้การกำหนดค่า M, N แตกต่างกันด้วย ในที่นี้จึงไม่นำผลลัพธ์ของทั้งสองวิธีมาเปรียบเทียบกัน แต่สิ่งหนึ่งที่สามารถกล่าวได้คือ การนำ FIM มาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาผกผันนี้ มีข้อดีคือ ความสะดวกในการนำมาเทริกซ์ปริพันธ์ที่คำนวณเพียงครั้งเดียว แต่สามารถนำมาใช้ได้กับหลายๆ ปัญหา ซึ่งถือเป็นการลดขั้นตอนความยุ่งยากของการหาผลเฉลยของปัญหาได้อย่างมาก

สรุปผลการวิจัย

บทความวิจัยนี้ได้ศึกษาการหาพจน์ต้นกำเนิดความร้อนของปัญหาผกผันของสมการความร้อนภายใต้เงื่อนไขไม่เฉพาะที่ด้วยระเบียบวิธีปริพันธ์จำกัดที่สร้างจากกฎสี่เหลี่ยมคางหมูและระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมไปข้างหลัง เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาที่ต้งขึ้นอย่างบกพร่องทำให้ต้องนำกระบวนการรีกูลาไรเซชันของทิกอนอฟมาประยุกต์ใช้ในกระบวนการนี้เพื่อให้ผลเฉลยมีความเสถียรมากยิ่งขึ้น จากการศึกษาตัวอย่างเชิงตัวเลขพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีที่ศึกษานี้มีความแม่นยำและมีเสถียรภาพตามเงื่อนไขที่กำหนด

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ รศ.ดร.สาธิต อินทจักร์ และ ผศ.ดร.นิฟาตมะห์ มะกาเจ สำหรับคำแนะนำในการเขียนบทความวิจัยฉบับนี้ และขอขอบคุณสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (สวทช.) ที่ได้สนับสนุนงบประมาณในการทำวิจัยนี้ จากโครงการสนับสนุนทุนนักวิจัยใหม่ วท.

เอกสารอ้างอิง

- Bin-Mohsin, B. & Lesnic, D. (2012). Determination of inner boundaries in modified Helmholtz inverse geometric problems using the method of fundamental solutions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(8), 1445-1458.
- Beck, J.V., Blackwell, B. & St Clair Jr., C. R. (1985). *Inverse Heat Conduction*. New York: Wiley.

- Blackwell, B. (1981). Efficient technique for the numerical solution of the one-dimensional inverse problem of heat conduction. *Numerical Heat Transfer*, 4, 229–238.
- Dehghan, M. (2001). An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation. *Applied Mathematical Modelling*, 25(9), 743–754.
- Farcas, A. & Lesnic, D. (2006). The boundary element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of Engineering Mathematics*, 54(4), 375–388.
- Hansen, P. C. (2001). The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In Johnston, P. (Eds), *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*. (pp. 119–142). Southampton: WIT Press.
- Hasanov, A. (2007). Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: Weak solution approach. *Journal of Mathematical Analysis with Applications*, 330(2), 766–779.
- Hazanee, A. (2017). Finite integration method for the time-dependent heat source determination of inverse problem. In *Proceeding of the 6th Burapha University International Conference 2017 (BUU2017)*. (pp. 391–401). Thailand: Chonburi.
- Hazanee, A. (2018). A note on finite integration method for solving differential equations. *Burapha Science Journal*, 23(1), 288–303. (in Thai).
- Hazanee, A., Ismailov, M. I., Lesnic, D. & Kerimov, N. B. (2013). An inverse time-dependent source problem for the heat equation. *Applied Numerical Mathematics*, 69, 13–33.
- Hazanee, A. & Lesnic, D. (2014). Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 88, 259–266.
- Hazanee, A., Lesnic, D., Ismailov, M. I. & Kerimov, N. B. (2015). An inverse time-dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition. *Applied Mathematical Modelling*, 39(20), 6258–6272.
- Hussein, M.S.; Kinash, N.; Lesnic, D. & Ivancho, M. (2017). Retrieving the time-dependent thermal conductivity of an orthotropic rectangular conductor. *Applicable Analysis*, 96(15), 2604–2618.
- Ismailov, M.I. & Çiçek, M. (2016). Inverse source problem for a time-fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 40(7-8), 4891–4899.
- Jin, B. & Marin, L. (2006). The method of fundamental solutions for inverse source problems associated with the steady-state heat conduction. *International Journal for Numerical methods in Engineering*, 69(8), 1570–1589.
- Johansson, B. T. & Lesnic, D. (2007). A variational method for identifying a spacewise dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 72(6), 748–760.

- Kabanikhin, S. I. (2008). Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 16(4), 317–357.
- Lesmana, R., Hazanee, A., Phon-On, A. & Saelee, J. (2017). A finite integration method for a time-dependent heat source identification of inverse problem. In *Proceeding of the 5th Asian Academic Society International Conference (AASIC)*. (pp. 444–451). Thailand: Khon Kaen.
- Li, M., Chen, C. S., Hon, Y. C. & Wen, P. H. (2015). Finite integration method for solving multi-dimensional partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1), 4979-4994.
- Li, M., Tian, Z. L., Hon, Y. C., Chen, C. S. & Wen, P. H. (2016). Improved finite integration method for partial differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64, 230-236.
- Morozov, A. (1966). On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Mathematics Doklady*, 7, 414–417.
- Petrov, Y. P. & Sizikov, V. S. (2005). *Well-posed, Ill-posed and Intermediate Problems*. Netherlands: VSP.
- Shamsi, M. & Dehghan, M. (2010). Determination of a control function in three-dimensional parabolic equations by Legendre pseudospectral method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 28(1), 74–93.
- Tian, N., Sun, J., Xu, W. & Lai, C. H. (2011). Estimation of unknown heat source function in inverse heat conduction problems using quantum-behaved particle swarm optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(17-18), 4110-4116.
- Tikhonov, A.N. & Arsenin, V.Y. (1977). *Solution of Ill-posed Problems*. Washington, DC: Winston.
- Wen, P. H., Hon, Y. C., Li, M. & Korakianitis, T. (2013). Finite integration method for partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(24), 10092–10106.
- Xiong, X., Yan, Y. & Wang, J. (2011). A direct numerical method for solving inverse heat source problems. *Journal of Physics: Conference Series*, 290, 012017 (10 pages).
- Yan, L., Fu, C. L., & Yang, F. L. (2008). The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(3), 216–222.
- Yang, C.Y. (1999). The determination of two heat sources in an inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(2), 345-356.
- Yang, F. & Fu, C. L. (2010). A simplified Tikhonov regularization method for determining the heat source. *Applied Mathematical Modelling*, 34(11), 3286–3299.