การประมาณค่าวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

Estimation of Asymptotic Confidence Ellipses for Birnbaum-Saunders Distribution

กนิษฐา หาญสูงเนิน, บุณยนุช สกลทวีโชติ, อาทิตยา สิทธิเสรีเสมอ และ วิกานดา ผาพันธ์*

Khanittha Hansoongnern, Bunyanuch Sakonthawichot , Artitaya Sittisareesmer and Wikanda Phaphan*

ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

Department of Applied Statistics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok

Received : 27 April 2018

Accepted : 18 July 2018

Published online : 20 July 2018

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ μ และ λ และสร้างวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ ซึ่งเป็นการแจกแจงที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้และใช้ในการสร้างตัวแบบทางชีววิทยา โดยตรวจสอบประสิทธิภาพของค่าประมาณที่ได้ด้วยความน่าจะเป็นคุ้มรวมเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่นที่ 0.98 โดยพิจารณาขนาดตัวอย่าง n มีค่าเท่ากับ 30, 100, 500 และ 1,000 พารามิเตอร์ λ มีค่าเท่ากับ 1, 3, 5, 10, 15, 20 และ μ มีค่าเท่ากับ 2 ทำซ้ำทั้งหมด 10,000 รอบ ในแต่ละกรณีและใช้โปรแกรม R เวอร์ชัน 3.4.3 ช่วยในการประมวลผล ผลการวิจัยพบว่าค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับจะเพิ่มขึ้น เมื่อขนาดตัวอย่าง n เพิ่มขึ้น โดยที่ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่คำนวณได้มีค่าเข้าใกล้สัมประสิทธิ์ของช่วงความเชื่อมั่นที่ 0.98 นอกจากนี้ค่าพารามิเตอร์ λ ที่แตกต่างกันส่งผลทำให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับแตกต่างกัน โดยที่ค่าพารามิเตอร์ λ =15 ให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมสูงสุดที่ขนาดตัวอย่าง n =500 โดยมีค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมเท่ากับ 0.9083

คำสำคัญ : การแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์, เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์, วงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับ

Abstract

The objective of this research is to propose the maximum likelihood estimators of parameter μ and λ also construct asymptotic confidence ellipse for Birnbaum-Saunders distribution. This distribution has been used in extensive of applications, reliability analysis and biological model. The performance of the asymptotic confidence ellipses is evaluated by considering the coverage probabilities and compared with the confidence coefficient of 0.98 for sample sizes n = 30, 100, 500 and 1,000; parameter λ =1, 3, 5, 10, 15 and 20 and parameter μ = 2. The program R version 3.4.3 is used for Monte Carlo simulation study with 10,000 iterations. The research results find that as the sample size is increasing, the coverage probability is also increasing and closes to the confidence coefficient of 0.98. Moreover, different values of lead to difference of coverage probability values. If the parameter λ equals to 15 with n =500, it gives the maximum of the coverage probability with 0.9083

Keywords : Birnbaum-Saunders distribution, Fisher information matrix, Asymptotic confidence ellipses

*Corresponding author. E-mail : wikanda.p@sci.kmutnb.ac.th

บทนำ

การแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ (Birnbaum and Saunders Distribution : BS) ถูกเสนอครั้งแรกโดย Birnbaum และ Saunders (1969a) สำหรับข้อมูลความล้มเหลว ภายใต้สมมุติฐานว่าความล้มเหลวนั้นเกิดจากการพัฒนาของรอยร้าวที่เห็นได้ชัด เช่น การแตกหักของใบพัดเครื่องบินที่เกิดจากการร้าวของใบพัด เป็นต้น หลังจากนั้นการแจกแจงนี้ได้รับความสนใจจากนักวิจัยอย่างแพร่หลาย เช่น งานวิจัยของ Ahmed *et al.* (2008) ซึ่งได้ทำการปรับเปลี่ยนรูปแบบพารามิเตอร์ของการแจกแจงนี้ใหม่เพื่อให้เหมาะสมกับการใช้งาน และหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์รูปแบบใหม่กับพารามิเตอร์รูปแบบเดิม Balakrishnan *et al.* (2009) ได้นำเสนอรูปแบบของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ บนพื้นฐานของการผสมขนาดของรูปแบบจำลองปกติและทำการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ขั้นตอนวิธี EM (EM-Algorithm) พร้อมทั้งวิเคราะห์ข้อมูลอายุการใช้งาน และแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากข้อมูลจริง ต่อมา Kundu *et al.* (2010) นำเสนอการแจกแจงเบิร์นบัม- แซนเดอร์สองตัวแปร (Bivariate Birnbaum-Sanders Distribution) และคุณสมบัติที่แตกต่างกันของการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจศึกษาการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ บนพื้นฐานของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ Seshadri (1994) นำเสนอ

ให้ตัวแปรสุ่ม x มีการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ จาก Bowonrattanaset และ Budsaba (2011) ทำให้ทราบว่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function: pdf.) ของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ สามารถหาได้จากฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนและฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงความยาวเอนเอียงอินเวอร์สเกาส์เซียน ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$f_{BS}(x;\mu,\lambda)=\frac{1}{2}[f_{IG}(x;\mu,\lambda)+f_{LBIG}(x;\mu,\lambda)] \quad ; x>0, \mu>0, \lambda>0$$

เนื่องจากการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์เป็นการแจกแจงที่รู้จักและนิยมใช้กันแพร่หลายในปัจจุบัน ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการสร้างวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ พร้อมทั้งเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม (Coverage Probability : CP) ของบริเวณความเชื่อมั่น (Confidence Region) ที่นำเสนอนี้กับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) ที่กำหนด โดยใช้วิธีมอลติคาร์โล

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ทบทวนวรรณกรรมเกี่ยวกับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ และการสร้างวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับ
2. สร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ด้วยวิธีปฏิเสธ-ยอมรับ
3. ประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ λ ด้วยวิธีภาวะความน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method) โดยพิจารณาจากค่าของพารามิเตอร์ $\lambda = 1,3,5,10,15,20$ และ $\mu = 2$ ที่ขนาดตัวอย่าง $n = 30,100,500,1000$ และทำซ้ำ 10,000 รอบ ในแต่ละกรณี
4. หาเมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ (Fisher' s Information Matrix) เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix) สำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ และการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution)
5. สร้างวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

6. หาค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม (Coverage Probability)และวัดประสิทธิภาพของค่าประมาณที่ได้ด้วยความน่าจะเป็นคุ้มรวม โดยเปรียบเทียบกับสัมประสิทธิความเชื่อมั่นที่ 0.98
7. วิเคราะห์ผลการวิจัย
8. สรุปผล

การแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ (Birnbaum-Saunders distribution)

ถ้าให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$f_{BS}(x;\mu,\lambda)=\frac{1}{2}[f_{IG}(x;\mu,\lambda)+f_{LBIG}(x;\mu,\lambda)]$$

เมื่อ $\mu>0$ และ $\lambda>0$ ซึ่งงานวิจัยนี้สนใจศึกษาการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ บนพื้นฐานของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์-เซียนที่ Seshadri (1994) นำเสนอ ดังนั้นจะได้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงอินเวิร์สเกาส์เซียน $f_{IG}(x;\mu,\lambda)$ คือ

$$f_{IG}(x;\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}x^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2x}\right\} \quad ;x>0,\mu>0,\lambda>0$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงความยาวเอนเอียงอินเวอร์สเกาส์เซียน $f_{LBIG}(x;\mu,\lambda)$ คือ

$$f_{LBIG}(x;\mu,\lambda)=\left(\frac{\lambda}{2\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\mu^{-1}\exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2x}\right\} \quad ;x>0,\mu>0,\lambda>0$$

โดยที่ μ เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location Parameter) หรือพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Parameter) และ λ เป็นพารามิเตอร์แสดงมาตราส่วน (Shape Parameter)

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

สมการภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

จากการศึกษาจะได้ว่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ คือ

$$L(x;\mu,\lambda)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda(x_i-\mu)^2}{2\mu^2x_i}\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{-\frac{1}{2}}\mu^{-n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda(x_i-\mu)^2}{2\mu^2x_i}\right\}$$

และลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ของ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\ln L(x;\mu,\lambda) = n\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+ n\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\ln(\mu) - \frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

จาก

$$\frac{\partial \ln L(x;\mu,\lambda)}{\partial\mu} = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial \ln L(x;\mu,\lambda)}{\partial\mu} = \frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^3} - \frac{n\lambda}{\mu^2} - \frac{n}{\mu} + \frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^3} - \frac{n\lambda}{\mu^2} = 0$$

$$2\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mu^3} - 2\frac{n\lambda}{\mu^2} - \frac{n}{\mu} = 0$$

$$2\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n\lambda\mu - n\mu^2 = 0$$

$$2\lambda(n\bar{x}) - 2n\lambda\mu - n\mu^2 = 0 \text{ เมื่อ } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$-\mu^2 - 2\lambda\mu + 2\lambda\bar{x} = 0$$

จากสูตรสมการกำลังสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ว่าคำตอบของสมการคือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ให้

$$a = -1,\ b = -2\lambda,\ c = 2\lambda\bar{x}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\hat{\mu} = -\left[\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 + 8\lambda\bar{x}}}{2}\right]$$

แต่เนื่องจาก μ ต้องมีค่ามากกว่า 0 ดังนั้นจะได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ μ คือ

$$\hat{\mu} = \frac{-2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 8\lambda\bar{x}}}{2}$$

และเนื่องจากไม่สามารถหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ λ ในรูปแบบสำเร็จได้จึงใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำเข้ามาช่วย ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้เราใช้วิธีหาค่าสูงสุดผ่านฟังก์ชัน optimize ในโปรแกรม R โดยพิจารณาฟังก์ชัน

$$g(\lambda) = n\ln\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda\left(x - \left(\frac{-2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 8\lambda\bar{x}}}{2}\right)\right)^2}{2\left(\frac{-2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 8\lambda\bar{x}}}{2}\right)^2 x_i} - n\ln\left(\frac{-2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 8\lambda\bar{x}}}{2}\right)$$

เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์สำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

ให้ตัวแปรสุ่ม x มีการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ ที่มีพารามิเตอร์ (μ, λ) เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์สำหรับพารามิเตอร์-สเปซ $\underline{\theta}$ เมื่อ $\underline{\theta} = (\mu, \lambda)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $I(\underline{\theta})$ สามารถคำนวณได้จาก

$$I(\underline{\theta}) = I(\mu, \lambda) = -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln f(x;\mu,\lambda) & \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\lambda}\ln f(x;\mu,\lambda) \\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu}\ln f(x;\mu,\lambda) & \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln f(x;\mu,\lambda) \end{bmatrix}$$

จาก Jorgensen *et al.* (1991) จะได้ว่าค่าคาดหมายของการแจกแจงผสมอินเวอร์สเกาส์เซียน คือ

$$E(X) = \mu + p\sigma^2\mu^2$$

ซึ่งการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ บนพื้นฐานของการแจกแจงที่ Seshadri (1994) นำเสนอมีความสัมพันธ์กับการแจกแจงแบบผสมอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ Jorgensen และคณะ (1991) นำเสนอคือ $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda}, p = \frac{1}{2}$ ดังนั้นจะได้ $E(X)$ ของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ คือ

$$E(X) = \mu + \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

จาก

$$\ln f(x;\mu,\lambda) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\left(2\pi x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{\lambda x}{2\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2x}$$
$$+ \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\left(2\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - \ln(\mu) + \ln\left(\lambda^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{\lambda x}{2\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{2x}$$

จะได้

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\ln f(x;\mu,\lambda) = \frac{x\lambda}{\mu^3} - \frac{\lambda}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} + \frac{x\lambda}{\mu^3} - \frac{\lambda}{\mu^2} = \frac{2x\lambda}{\mu^3} - \frac{2\lambda}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2}\ln f(x;\mu,\lambda) = \frac{-6x\lambda}{\mu^4} + \frac{4\lambda}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{-\lambda\left(6x - 4\mu - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^4}$$

ดังนั้น

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\ln f(x;\mu,\lambda)\right] = E\left[=\frac{-\lambda\left(6x - 4\mu - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^4}\right] = \frac{-\lambda\left(6E(x) - 4\mu - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^4}$$

$$= \frac{-\lambda\left(6\left(\mu + \frac{\mu^2}{2\lambda}\right) - 4\mu - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^4} = \frac{-\lambda\left(6\mu + \frac{3\mu^2}{\lambda} - 4\mu - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^4}$$

$$= \frac{-\lambda\left(2\mu + \frac{2\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^4} = \frac{-2\mu\lambda - 2\mu^2}{\mu^4} = \frac{-2\mu(\lambda + \mu)}{\mu^4}$$

$$= \frac{-2(\lambda + \mu)}{\mu^3}$$

และ

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \lambda}\ln f(x;\mu,\lambda) = \frac{2x}{\mu^3} - \frac{2}{\mu^2} = \frac{2x - 2\mu}{\mu^3} = \frac{2(x-\mu)}{\mu^3}$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \lambda}\ln f(x;\mu,\lambda)\right] = E\left[\frac{2(x-\mu)}{\mu^3}\right] = \frac{2(E(x)-\mu)}{\mu^3} = \frac{2\left(\left(\mu + \frac{\mu^2}{2\lambda}\right) - \mu\right)}{\mu^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^3} = \frac{1}{\mu\lambda}$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\ln f(x;\mu,\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{x}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\lambda} - \frac{x}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2x}$$

$$= \frac{2}{2\lambda} - \frac{2x}{2\mu^2} + \frac{2}{\mu} - \frac{2}{2x} = \frac{1}{\lambda} - \frac{x}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\ln f(x;\mu,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}$$

จะได้ว่า

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\ln f(x;\mu,\lambda)\right] = E\left[-\frac{1}{\lambda^2}\right] = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu}\ln f(x;\mu,\lambda)=\frac{2x}{\mu^3}-\frac{2}{\mu^2}=\frac{2x-2\mu}{\mu^3}=\frac{2(x-\mu)}{\mu^3}$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu}\ln f(x;\mu,\lambda)\right]=E\left[\frac{2(x-\mu)}{\mu^3}\right]=\frac{2(E(x)-\mu)}{\mu^3}=\frac{2\left(\left(\mu+\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)-\mu\right)}{\mu^3}$$

$$=\frac{2\left(\frac{2\mu\lambda+\mu^2-2\mu\lambda}{2\lambda}\right)}{\mu^3}=\frac{\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)}{\mu^3}=\frac{1}{\mu\lambda}$$

ดังนั้นเมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์สำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ คือ

$$I(\underline{\theta})=I(\mu,\lambda)=-\begin{bmatrix}-\frac{2(\lambda+\mu)}{\mu^3} & \frac{1}{\mu\lambda}\\ \frac{1}{\mu\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2}\end{bmatrix}$$

เมื่อ $\underline{\theta}$ เป็นเวกเตอร์ 2 มิติของพารามิเตอร์ $\underline{\theta}=(\mu,\lambda)$ และจะได้เมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ สำหรับตัวอย่างขนาด n คือ

$$I_n(\underline{\theta})=I_n(\mu,\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} & -\frac{n}{\mu\lambda}\\ -\frac{n}{\mu\lambda} & \frac{n}{\lambda^2}\end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ซึ่งจะเท่ากับอินเวอร์สของเมทริกซ์สารสนเทศของฟิชเชอร์ แทนด้วย $\Lambda=I_n^{-1}(\underline{\theta})$ ดังนั้น เมื่อ n เข้าสู่ ∞ จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม คือ

$$\Lambda=I_n^{-1}(\underline{\theta})=I_n^{-1}(\mu,\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{\mu^3}{n(2\lambda+\mu)} & \frac{\mu^2\lambda}{n(2\lambda+\mu)}\\ \frac{\mu^2\lambda}{n(2\lambda+\mu)} & \frac{2\lambda^2(\lambda+\mu)}{n(2\lambda+\mu)}\end{bmatrix}$$

พิสูจน์

$$I_n(\underline{\theta})=I_n(\mu,\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} & -\frac{n}{\mu\lambda}\\ -\frac{n}{\mu\lambda} & \frac{n}{\lambda^2}\end{bmatrix}$$

จาก

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$I_n^{-1}(\mu,\lambda) = \frac{1}{\left(\frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3}\right)\left(\frac{n}{\lambda^2}\right) - \left(-\frac{n}{\mu\lambda}\right)\left(-\frac{n}{\mu\lambda}\right)}\begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda^2} & \frac{n}{\mu\lambda} \\ \frac{n}{\mu\lambda} & \frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2n^2(\lambda+\mu)}{\mu^3\lambda^2}\right) - \left(-\frac{n}{\mu\lambda}\right)^2}\begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda^2} & \frac{n}{\mu\lambda} \\ \frac{n}{\mu\lambda} & \frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{2n^2\lambda + 2n^2\mu - n^2\mu}{\mu^3\lambda^2}}\begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda^2} & \frac{n}{\mu\lambda} \\ \frac{n}{\mu\lambda} & \frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mu^3\lambda^2}{n^2(2\lambda+\mu)}\begin{bmatrix} \frac{n}{\lambda^2} & \frac{n}{\mu\lambda} \\ \frac{n}{\mu\lambda} & \frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu^3}{n(2\lambda+\mu)} & \frac{\mu^2\lambda}{n(2\lambda+\mu)} \\ \frac{\mu^2\lambda}{n(2\lambda+\mu)} & \frac{2\lambda^2(\lambda+\mu)}{n(2\lambda+\mu)} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้

$$\Lambda = I_n^{-1}(\underline{\theta}) = I_n^{-1}(\mu,\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\mu^3}{n(2\lambda+\mu)} & \frac{\mu^2\lambda}{n(2\lambda+\mu)} \\ \frac{\mu^2\lambda}{n(2\lambda+\mu)} & \frac{2\lambda^2(\lambda+\mu)}{n(2\lambda+\mu)} \end{bmatrix}$$

การแจกแจงเชิงเส้นกำกับ

พิจารณาลำดับของตัวแปรสุ่มจากภาวะความน่าจะเป็นสูงสุดของ $\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)}$ โดยที่ใช้ทฤษฎีบทวิธีเดลต้า (Delta Method Theorem) จะได้ว่า

$$\sqrt{n}\,(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}) \xrightarrow{d} X$$

เมื่อ $\xrightarrow{d}$ คือ การลู่เข้าเชิงการแจกแจง (Convergence in Distribution)

ถ้าให้ X มีการแจกแจงปรกติสองตัวแปร (Bivariate Normal Distribution) $N_2\left(0, I^{-1}(\underline{\theta})\right)$ ดังนั้นจะได้

$$\sqrt{n}\,(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}) \xrightarrow{d} X \sim N_2(0, I^{-1}(\underline{\theta}))$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta})}{\sqrt{I^{-1}(\underline{\theta})}} \xrightarrow{d} Z \sim N_2(0, I_2)$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta})}{\sqrt{\frac{I^{-1}(\underline{\theta})}{n}}} \xrightarrow{d} Z \sim N_2(0, I_2)$$

$$\frac{(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta})}{\sqrt{I_n^{-1}(\underline{\theta})}} \xrightarrow{d} Z \sim N_2(0, I_2)$$

$$\frac{(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta})}{\sqrt{\Lambda}} \xrightarrow{d} Z \sim N_2(0, I_2)$$

$$(\Lambda^{\frac{1}{2}})^{-1}(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}) \xrightarrow{d} Z \sim N_2(0, I_2)$$

เมื่อ $\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ถ้า Z_1, Z_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจงแจงปรกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 1 และเป็นอิสระกัน จะได้ว่า $\mathrm{Z}' = (\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2)$ มีการแจกแจงปรกติสองตัวแปร (Bivariate Normal Distribution) $N_2(0, I_2)$ ดังนั้น

$$\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right)'(\Lambda)^{-\frac{1}{2}}(\Lambda)^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right) = \left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right)'\Lambda^{-1}\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right) = \mathrm{Z}'\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_1^2 + \mathrm{Z}_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Z}_2^2 \sim \chi^2_{(2)}$$

จะมีการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 2 ($\chi^2_{(2)}$)

บริเวณความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

จาก Duangchana & Budsaba (2014) จะได้ว่า การแจกแจง $N_2\left(0, I^{-1}(\underline{\theta})\right)$ กำหนดความน่าจะเป็นวงรีที่ $1-\alpha$ เป็น

$$\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} : \left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right)'\Lambda^{-1}\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right) \le \chi^2_2(\alpha)\right)$$

เมื่อ $\chi^2_2(\alpha)$ คือเปอร์เซ็นไทล์บนที่ $(100\,\alpha)$ (The Upper $(100\,\alpha)$th Percentile) ของการแจกแจงไคกำลังสองที่องศาเสรีเท่ากับ 2 ดังนั้นบริเวณความเชื่อมั่น $100\,(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ $\underline{\theta}' = (\mu, \lambda)$ ของการแจกแจงปรกติใน 2 มิติ (Two-Dimensional Normal Distribution) คือวงรี ดังสมการ

$$\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right)'\Lambda^{-1}\left(\hat{\underline{\theta}}_n^{(MLE)} - \underline{\theta}\right) \le \chi^2_2(\alpha)$$

เนื่องจากการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์มีอินเวอร์สของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมคือ

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} & -\dfrac{n}{\mu\lambda} \\ -\dfrac{n}{\mu\lambda} & \dfrac{n}{\lambda^2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu & \hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3} & -\dfrac{n}{\mu\lambda} \\ -\dfrac{n}{\mu\lambda} & \dfrac{n}{\lambda^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu \\ \hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda \end{bmatrix} \le \chi^2_{(2)}(\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu) - -\dfrac{n}{\mu\lambda}(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda) & -\dfrac{n}{\mu\lambda}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu) + \dfrac{n}{\lambda^2}(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu \\ \hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda \end{bmatrix} \le \chi^2_{(2)}(\alpha)$$

$$\frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu)^2 - \frac{n}{\mu\lambda}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu)(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda) - \frac{n}{\mu\lambda}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu)(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda) + \frac{n}{\lambda^2}(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda)^2 \le \chi^2_{(2)}(\alpha)$$

ดังนั้นบริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับ 100 $(1-\alpha)$% สำหรับพารามิเตอร์สเปซ θ ที่ประกอบด้วยทุก ๆ ค่าของ (μ, λ) คือ

$$\frac{2n(\lambda+\mu)}{\mu^3}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu)^2 - \frac{2n}{\mu\lambda}(\hat{\mu}_n^{(MLE)} - \mu)(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda) + \frac{n}{\lambda^2}(\hat{\lambda}_n^{(MLE)} - \lambda)^2 \le \chi^2_{(2)}(\alpha)$$

การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเบิร์มบัม-แซนเดอร์ ด้วยวิธีปฏิเสธ-ยอมรับ

1.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ μ และ λ โดยที่ $\mu > 0, \lambda > 0$

1.2 สร้างตัวแปรสุ่มของการแจกแจงเบิร์มบัม-แซนเดอร์ โดยอาศัยการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน $y \sim IG(\mu, \lambda)$ ด้วยฟังก์ชัน "rinvgaussian" ใน Packages "LaplacesDemon" ของโปรแกรม R

1.3 สร้างเลขสุ่ม $u \sim U(0,1)$

1.4 ถ้า $u < \dfrac{f_{BS}(y)}{c * f_{IG}(y)}$ จะยอมรับให้ค่า $x = y$ แต่ถ้าไม่ใช่กลับไปทำขั้นตอนที่ 2 (ปฏิเสธค่า y) และทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ค่า x ครบจำนวน n ค่า เมื่อ c คำนวณได้จาก

$$\frac{f_{BS}(x, \mu, \lambda)}{f_{IG}(x, \mu, \lambda)} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\mu}$$

ซึ่งสามารถคำนวณหาค่า c ได้จากค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\mu}$ โดยใช้ฟังก์ชัน optimise ในโปรแกรม R

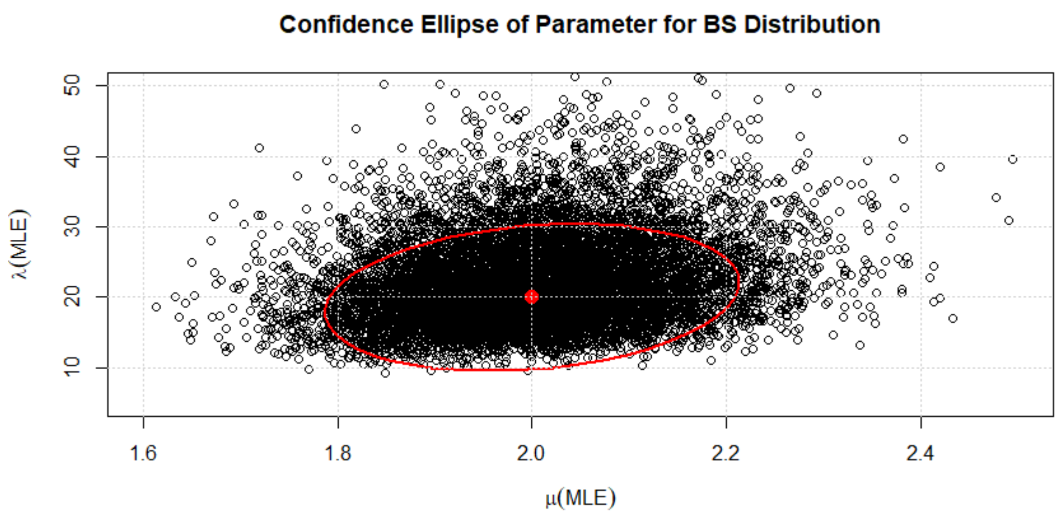
ผลการศึกษาเชิงจำลองและวิจารณ์ผล

ผลลัพธ์ของการศึกษาที่ค่าพารามิเตอร์และขนาดของตัวอย่างสุ่มต่าง ๆ ของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ ในที่นี้จะแสดงเฉพาะกรณีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมสูงสุดของแต่ละขนาดตัวอย่าง

กรณี $n = 30$

ตารางที่ 1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ = 2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ =20 และค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของบริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

$n = 30$, $\mu = 2$, $\lambda = 20$	
ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ	2.003229
ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ	22.370110
ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม	0.8622

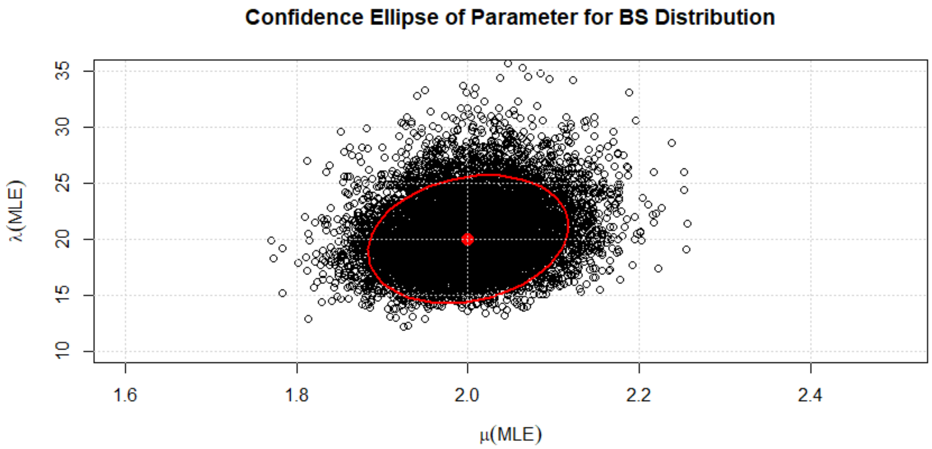


ภาพที่ 1 บริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ สำหรับกรณีที่ $n = 30$, $\mu = 2$, $\lambda = 20$

กรณี $n = 100$

ตารางที่ 2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ =2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ =20 และค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม ของบริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

$n = 100$, $\mu = 2$, $\lambda = 20$	
ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ	2.001594
ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ	20.607076
ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม	0.8947

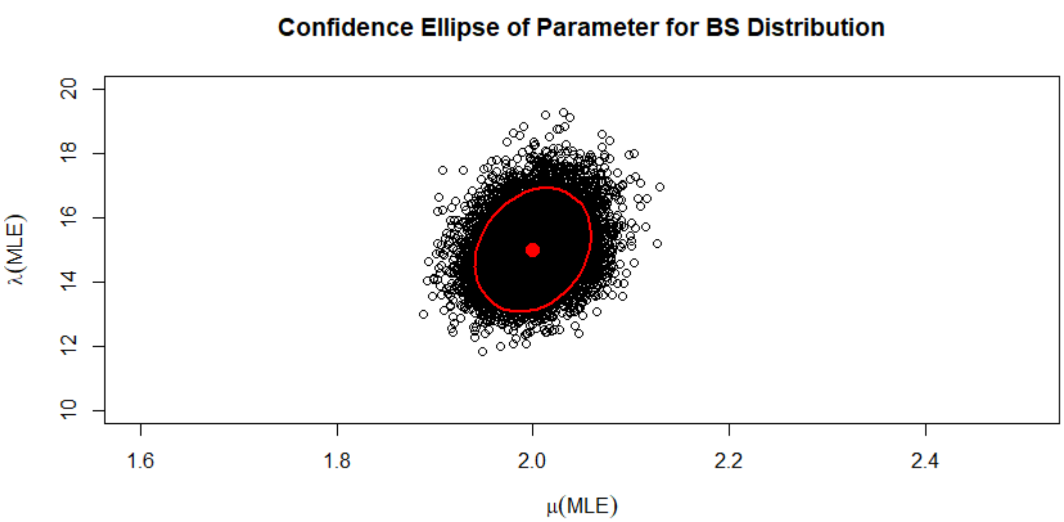


ภาพที่ 2 บริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ สำหรับกรณีที่ $n = 100$, $\mu = 2$, $\lambda = 20$

กรณี $n = 500$

ตารางที่ 3 ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ =2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ =15 และค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม ของบริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

$n = 500$, $\mu = 2$, $\lambda = 15$	
ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ	2.00062
ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ	15.08463
ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม	0.9083

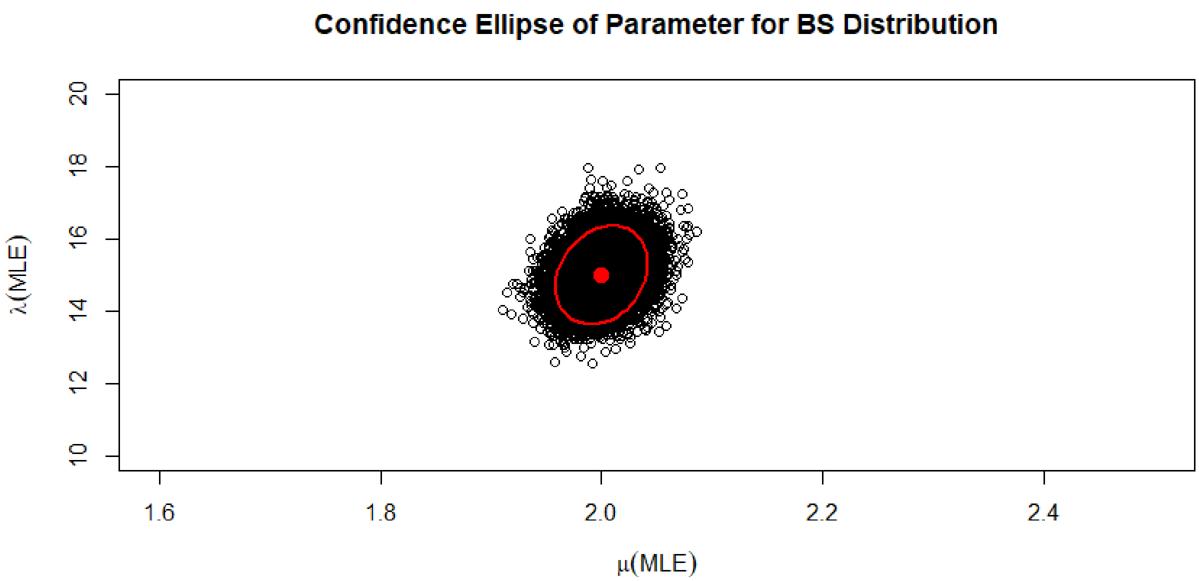


ภาพที่ 3 บริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ สำหรับกรณีที่ $n = 500$, $\mu = 2$, $\lambda = 15$

กรณี $n = 1{,}000$

ตารางที่ 4 ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ =2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ =15 และค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม ของบริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

$n = 1{,}000$, $\mu = 2$, $\lambda = 15$	
ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ	2.00035
ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ	15.05472
ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม	0.9065



ภาพที่ 4 บริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับของการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ สำหรับกรณีที่ $n = 1{,}000$, $\mu = 2$, $\lambda = 15$

จากผลการศึกษาเชิงจำลองจะเห็นได้ว่าค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมมีค่ามากสุดเมื่อ $n = 500$, $\lambda = 15$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ต่างจากงานวิจัยของ Duangchana & Budsaba (2014) ที่ได้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนมีค่ามากสุดเมื่อ $n = 1{,}000$, $\mu = 1$ และ $\lambda = 20$ แต่เนื่องจากงานวิจัยนี้กำหนดค่าพารามิเตอร์ $\mu = 2$ และการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ เป็นฟังก์ชันผสมระหว่างการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนและการแจกแจงความยาว-เอนเอียงอินเวอร์สเกาส์เซียน ดังนั้นผลการทดลองที่ได้จึงมีความแตกต่างกัน

ตารางที่ 5 ขนาดตัวอย่าง n ค่าประมาณพารามิเตอร์ μ ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม ของบริเวณวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์

n	μ	λ	ค่าประมาณพารามิเตอร์		ความน่าจะเป็นคุ้มรวม
			$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	
30	2	1	2.007093	1.154121	0.7559
		3	2.016675	3.402510	0.8119
		5	2.011593	5.575440	0.8368
		10	2.007769	11.193281	0.8579
		15	2.002266	16.694619	0.8596
		20	2.003229	22.370110	**0.8622**
100	2	1	1.977308	1.048591	0.7692
		3	2.003365	3.096291	0.8407
		5	2.005287	5.183344	0.8601
		10	2.001586	10.319060	0.8865
		15	2.002322	15.480584	0.8923
		20	2.001594	20.607076	**0.8947**
500	2	1	1.966402	1.017967	0.7328
		3	2.000313	3.023348	0.8473
		5	2.000462	5.029814	0.8727
		10	1.99984	10.06696	0.8955
		15	2.00062	15.08463	**0.9083**
		20	2.000397	20.126064	0.9059
1,000	2	1	1.965162	1.014002	0.6867
		3	2.000859	3.012831	0.8476
		5	2.000578	5.021246	0.8770
		10	2.000472	10.033602	0.8962
		15	2.00035	15.05472	**0.9065**
		20	2.000172	20.066535	0.9055

สรุปผลการวิจัย

ผลการศึกษาพบว่าค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ที่มีพารามิเตอร์ μ และ λ จะมีค่าเข้าใกล้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ 0.98 มากขึ้น เมื่อขนาดตัวอย่าง n เพิ่มขึ้น และที่ขนาดตัวอย่าง $n = 500$ จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมสูงสุด ทำให้ทราบว่าค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับสำหรับการแจกแจงเบิร์นบัม-แซนเดอร์ที่มีพารามิเตอร์ μ และ λ จะมีค่าสูงขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่

นอกจากนี้ยังพบว่าค่าพารามิเตอร์ λ ที่แตกต่างกันส่งผลทำให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับแตกต่างกันด้วย โดยที่ค่าพารามิเตอร์ $\lambda = 15$ จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมสูงสุดที่ขนาดตัวอย่าง $n = 500$ โดยมีค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมเท่ากับ 0.9083

สำหรับงานวิจัยครั้งต่อไปควรศึกษาเชิงจำลองที่ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ และศึกษาวิธีการตรวจสอบคุณภาพของวงรีความเชื่อมั่นเชิงเส้นกำกับด้วยค่าอื่น เช่น ค่าความยาวช่วงโดยเฉลี่ย เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

Ahmed, S.E., Budsaba, K., Lisawadi, S., & Volodin, A. (2008). Parametric estmation for the Birnbaum-saunders lifetime distribution based on new parametrization. *Thailand Statistician*, *6*(2), 213-240.

Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A., & Vilca, F. (2009). Estimation in the Birnbaum-saunders distribution based on scale-mixture of normal and the em-algorithm. *SORT*, *33*(2), 171-192.

Birnbaum, Z. W., & Saunders, S. C. (1969a). A new family of lifetime distribution. *Applied Probability*, *6*, 319-327.

Birnbaum, Z. W., & Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a family of life distribution with applications to fatigue. *Applied Probability*, *6*, 328-347.

Bowonrattanaset, P., & Budsaba, K. (2011). Some Properties of the Three-Parameter Crack Distribution. *Thailand Statistician*, *9(2)*, 195-203.

Duangchana, N. & Budsaba, K. (2014) Asymptotic confidence ellipses of parameters for the inverse Gaussian distribution. *Thammasat International Journal of Science and Technology, 19(2)*, 22-29.

Kundu, D., Balakrishnan, N., & Jamalizadeh, A. (2010) Bivariate Birnbaum-saunders distribution and associated inference. *Journal of Multivariate Analysis*, *101*, 113-125.

Jorgensen, B., Seshadri, V., & Whitmore, G. A. (1991) On the mixture of the inverse Gaussian distribution with its complementary reciprocal. *Scad J Statist*, *18*, 77-89.

Seshadri, V. (1994) The Inverse Gaussian Distribution (A Case Study in Exponential Families), Clarendon Press, Oxford.