ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงเพื่อหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น

A Modified Secant Method for Solving Nonlinear Equations

อภิชาติ เนียมวงษ์*

Apichat Neamvonk*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

Received : 12 June 2017

Accepted : 14 July 2017

Published online : 26 July 2017

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้เรานำเสนอการปรับปรุงของระเบียบวิธีตัดเส้นโค้งสำหรับการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบ $f(x)=0$ ซึ่งสูตรการทำซ้ำจะแทนที่จุดเริ่มต้นสองจุดด้วยผลต่างสืบเนื่อง การทดสอบประสิทธิภาพการทำงานของระเบียบวิธีปรับปรุงใหม่ใช้การวิเคราะห์จำนวนรอบของการทำซ้ำ อันดับของการลู่เข้า และกราฟของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ โดยเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีของนิวตัน ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง โดยมีฟังก์ชันในการทดสอบ 3 ฟังก์ชัน ได้แก่ $xe^{x}-1$, $x^{2}-(1-x)^{5}$ และ $x^{3}-e^{-x}$ ผลลัพธ์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีใหม่มีจำนวนรอบของการทำซ้ำ และอัตราการลู่เข้าสู่ผลเฉลยแท้จริงใกล้เคียงกับระเบียบวิธีของนิวตัน

คำสำคัญ : สมการไม่เชิงเส้น ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง ระเบียบวิธีการทำซ้ำ

Abstract

In this research, we propose a modification of the Classical Secant method for solving nonlinear equations in the form of $f(x)=0$. The Divided Difference is applied into the Secant method and now the iterative algorithm depended on two initial points. We conduct numerical simulations to compare our modified method with Newton and the original one, in which the number of iterations, the computational order of convergence (COC) and graphs of relative error of each are implemented. There are three test functions i.e., $xe^{x}-1$, $x^{2}-(1-x)^{5}$ and $x^{3}-e^{-x}$. The numerical results show that the modified method have the number of iteration and the rate of convergence similar to Newton method.

Keywords : nonlinear equations, Newton method, Secant method, iterative method

*Corresponding author. E-mail : apichat@buu.ac.th

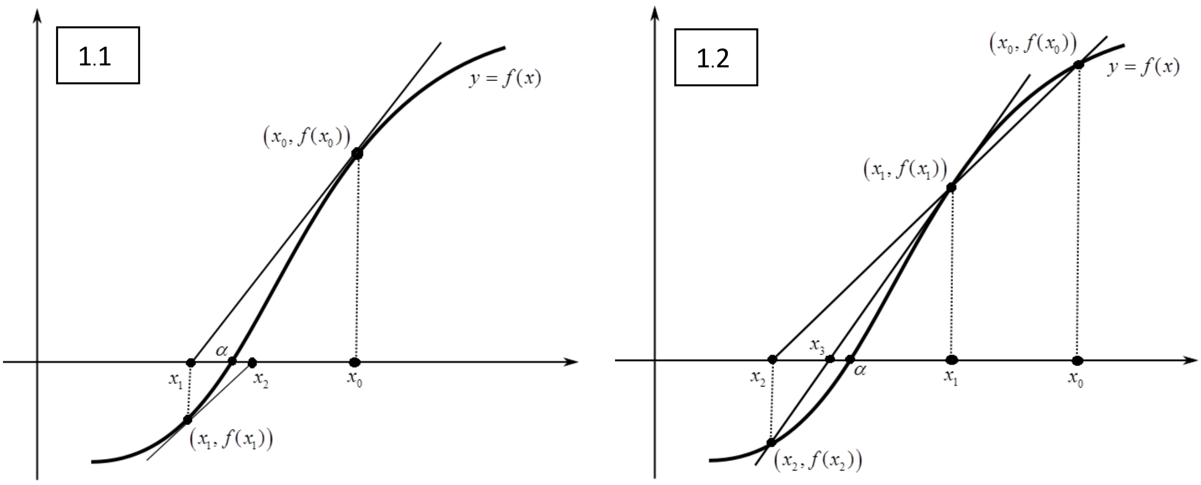
บทนำ

ระเบียบวิธีของนิวตัน (Newton method or Newton-Raphson method) เป็นวิธีที่ใช้อย่างแพร่หลายในการหารากหรือผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) ที่อยู่ในรูปแบบ $f(x)=0$ นั้นมี 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าเริ่มต้นนั่นคือ x_0 และฟังก์ชัน f ซึ่งต้องเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (f') ได้

ขั้นตอนที่ 2 ประมาณค่าผลเฉลยใหม่ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ โดยใช้ x_0

ขั้นตอนที่ 3 ทำซ้ำโดยใช้สูตร $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ เมื่อ $n = 0,1,2,\ldots$ จนกระทั่งค่าประมาณผลเฉลย (approximate solution) ที่ได้ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริง (exact solution), α ดังรูปที่ 1.1 พบว่าค่าประมาณผลเฉลย x_2 นั้นลู่เข้าสู่ α



ภาพที่ 1 แสดงการลู่เข้าสู่รากของ (1.1)ระเบียบวิธีของนิวตัน และ(1.2)ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง

ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง (Secant method) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้หาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้นโดยแทนที่เส้นสัมผัสเส้นโค้ง (tangent line) ด้วยเส้นตัดโค้ง (secant line) ซึ่งผ่านจุดสองจุดคือ $(x_0, f(x_0))$ และ $(x_1, f(x_1))$ (Traub 1964) แสดงให้เห็นว่าทั้งสองเส้นมีค่าใกล้เคียงกัน ดังรูปที่ 1.2 จะได้ว่า $f'(x_n) = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$ ดังนั้นสูตรในการประมาณผลเฉลยของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งคือ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} f(x_n) \qquad (1)$$

วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้สนใจการแทนที่อนุพันธ์ด้วยเส้นตัดโค้งระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งนั้นในสมการที่ (1) นั้น ถ้าจุดสองจุด คือ $(x_0, f(x_0))$ และ $(x_1, f(x_1))$ ห่างกันมากจะทำให้ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งจะมีจำนวนรอบของการทำซ้ำมากหรือลู่ออก (Srivastava and Srivastava, 2011) ดังนั้นผู้วิจัยเห็นว่าจุดสองจุดดังกล่าวควรถูกแทนที่ด้วยผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (forward divided difference) ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward divided difference) และผลต่างสืบเนื่องกลาง (central divided difference) เมื่อจุดสองจุดห่างกันน้อย ๆ ดังสูตรต่อไปนี้

ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า แทนด้วย $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n+\delta) - f(x_n)}{\delta}$ ดังนั้นสมการที่ (1) จะได้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\delta}{f(x_n+\delta) - f(x_n)} f(x_n) \tag{2}$$

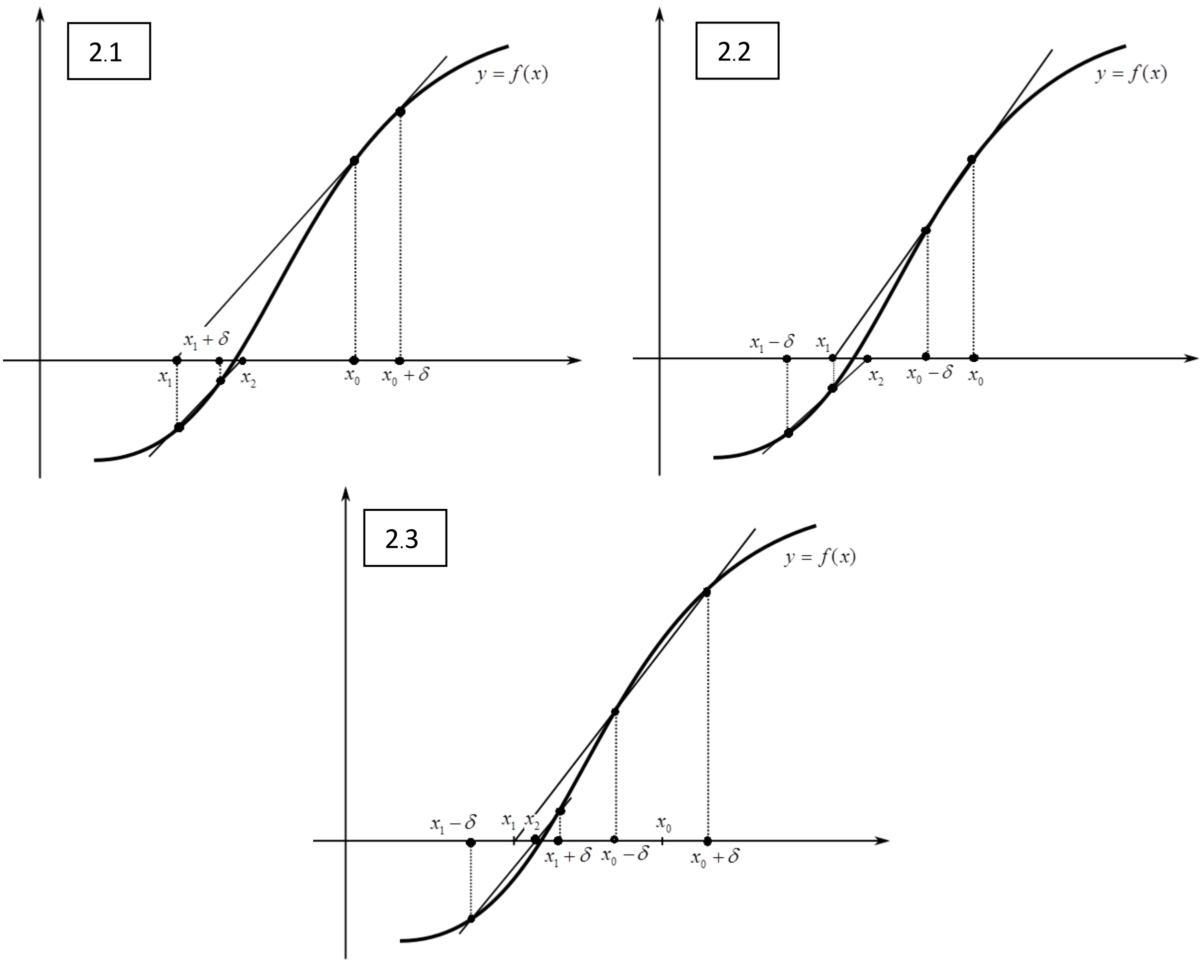
ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง แทนด้วย $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n) - f(x_n-\delta)}{\delta}$ ดังนั้นสมการที่ (1) จะได้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\delta}{f(x_n) - f(x_n-\delta)} f(x_n) \tag{3}$$

และผลต่างสืบเนื่องกลาง แทนด้วย $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n+\delta) - f(x_n-\delta)}{2\delta}$ ดังนั้นสมการที่ (1) จะได้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\delta}{f(x_n+\delta) - f(x_n-\delta)} f(x_n) \tag{4}$$

เมื่อ δ มีค่าน้อย ๆ



ภาพที่ 2 แสดงขั้นตอนการทำซ้ำสองรอบแรกคือ x_1 และ x_2 เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นคือ x_0 ของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงโดยใช้ (2.1)ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (2.2)ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และ(2.3)ผลต่างสืบเนื่องกลาง

จากสมการที่ (2)–(4) เราเรียกว่า ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุง (Modified Secant method) และพบว่าระเบียบวิธีการใหม่ที่ได้ใช้ค่าเริ่มต้นเพียงจุดเดียว (ดังภาพที่ 2.1-2.3) ซึ่งต่างจากระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งที่ใช้จุดเริ่มต้นสองจุด (ดังภาพที่ 1.2) ในปี 2002 Babolian และ Biazar ได้นำเสนอนิยามของอันดับคำนวนของการลู่เข้า (Computational order of convergence (COC)) ของลำดับ $\{x_n\}$ คือ $\rho = \dfrac{\ln\left|{e_{n+1}}/{e_n}\right|}{\ln\left|{e_n}/{e_{n-1}}\right|}$ เมื่อ $e_n = x_n - \alpha$ เพื่อใช้ทดสอบอันดับของการลู่เข้าสู่ผลเฉลยแท้จริง ซึ่งในการคำนวณหาค่าของ ρ นั้นเราไม่ทราบค่าของผลเฉลยแท้จริง (α) ดังนั้นเราจะแทน α ด้วย x_k เป็นค่าประมาณผลเฉลยที่ k^{th} จะได้

$$\rho = \frac{\ln\left|{(x_k - x_{k-1})}/{(x_{k-1} - x_{k-2})}\right|}{\ln\left|{(x_{k-1} - x_{k-2})}/{(x_{k-2} - x_{k-3})}\right|}, \text{ เมื่อ } k = 3,4,5,... \qquad (5)$$

ผลการวิจัยและวิจารณ์ผล

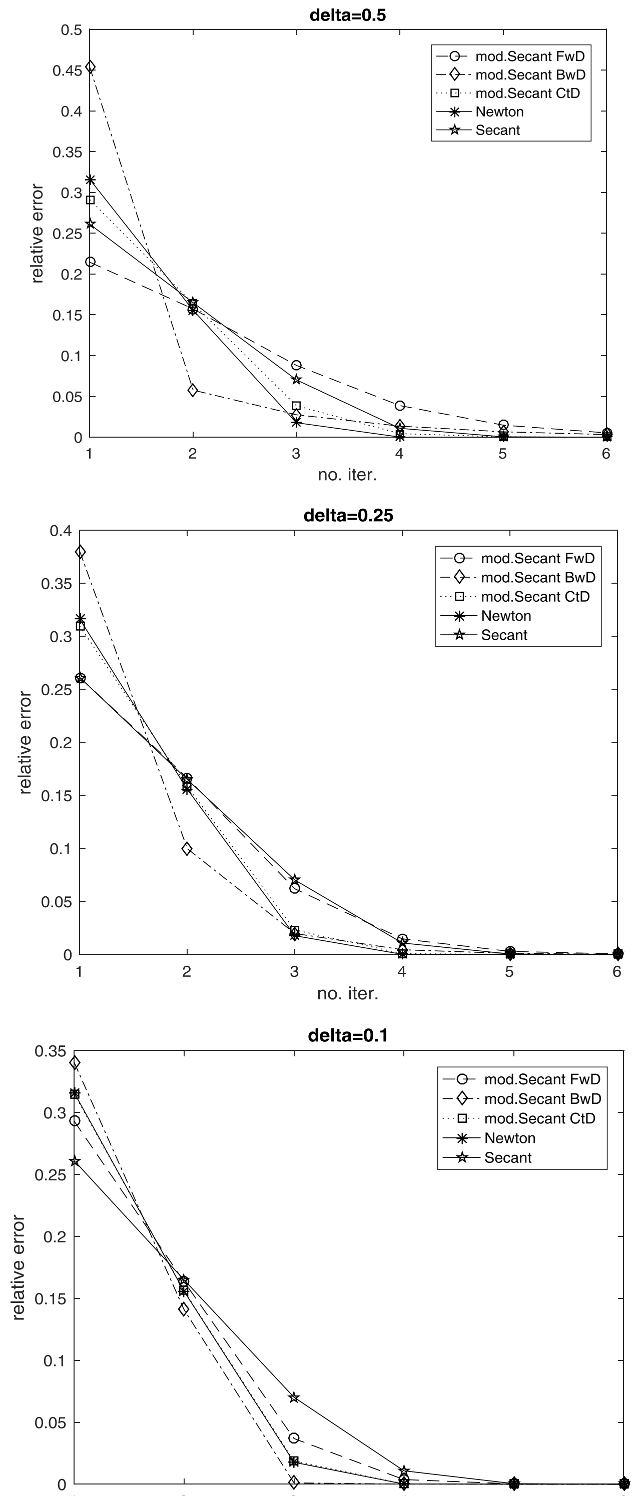
ตารางที่ 1-2 แสดงการหาผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น $xe^{x}-1=0$ โดยเปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำ (Ide ,2008) ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่า COC จากสมการที่ 5 เมื่อกำหนดให้ $\delta=0.5$ และ $\delta=0.25$ ซึ่งใช้ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (mod.Secant FwD) ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (mod.Secant BwD) และผลต่างสืบเนื่องกลาง (mod.Secant CtD) กับระเบียบวิธีของนิวตัน (Newton) และระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง (Secant) โดยกำหนดค่าเริ่มต้นเท่ากัน และในแต่ละวิธีจะหยุดเมื่อค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|<1\times10^{-8}$ คำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB R2016a

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบในการหาผลเฉลยของฟังก์ชัน $xe^{x}-1=0$ เมื่อกำหนดให้ $\delta=0.5$

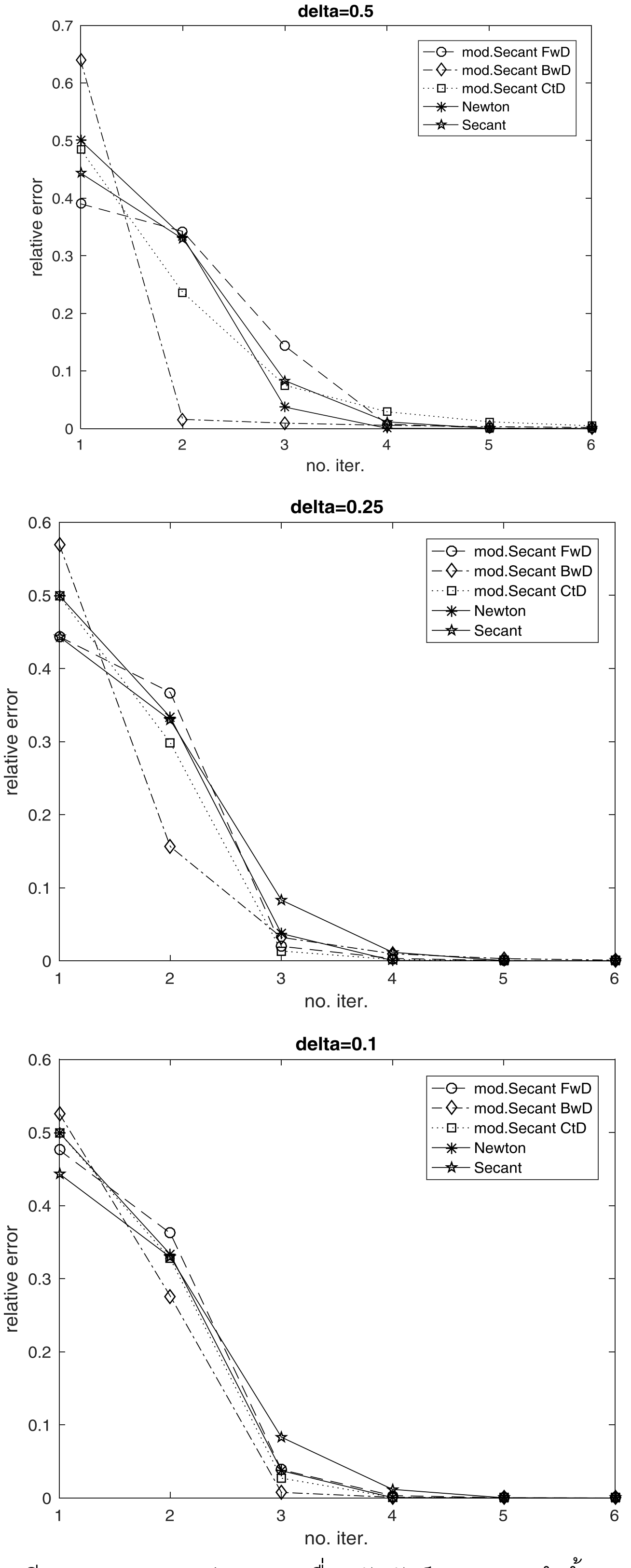
ฟังก์ชัน	วิธีทดสอบ	ค่าเริ่มต้น	ค่าประมาณผลเฉลย	จำนวนรอบของการทำซ้ำ	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	COC
$xe^{x}-1=0$	mod.Secant FwD	$x_0=1$	0.56714329	13	4.482950e-09	1.08949759
	mod.Secant BwD		0.56714329	13	6.293515e-09	1.20490819
	mod.Secant CtD		0.56714329	8	2.447582e-10	1.61273569
	Newton		0.56714329	6	1.957571e-16	1.89909958
	Secant	$x_0=1.5,\ x_1=1$	0.56714329	8	3.063671e-09	1.55315907

ตารางที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบในการหาผลเฉลยของฟังก์ชัน $xe^{x}-1=0$ เมื่อกำหนดให้ $\delta=0.25$

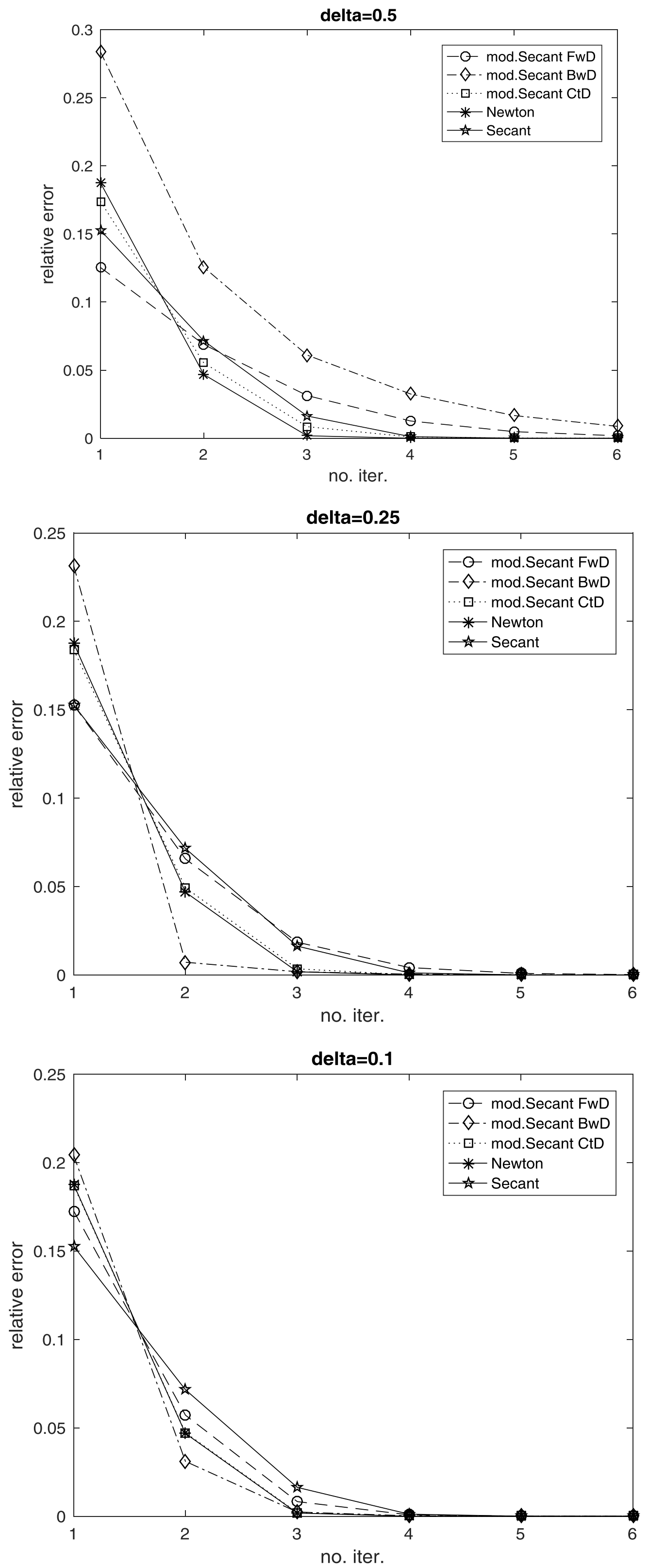
ฟังก์ชัน	วิธีทดสอบ	ค่าเริ่มต้น	ค่าประมาณผลเฉลย	จำนวนรอบของการทำซ้ำ	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	COC
$xe^{x}-1=0$	mod.Secant FwD	$x_0=1$	0.56714329	10	9.446120e-10	1.18356250
	mod.Secant BwD		0.56714329	8	4.748821e-09	1.40073770
	mod.Secant CtD		0.56714329	6	3.540572e-09	1.87085159
	Newton		0.56714329	6	1.957571e-16	1.89909958
	Secant	$x_0=1.5,\ x_1=1$	0.56714329	8	3.063671e-09	1.55315907



ภาพที่ 3 แสดงกราฟเปรียบเทียบการลดลงของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 6 รอบการทำซ้ำแรกของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และผลต่างสืบเนื่องกลาง กับระเบียบวิธีของนิวตัน และระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง เมื่อกำหนดให้ $\delta = 0.5, 0.25, 0.1$ ของ $xe^{x} - 1 = 0$



ภาพที่ 4 แสดงกราฟเปรียบเทียบการลดลงของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 6 รอบการทำซ้ำแรกของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และผลต่างสืบเนื่องกลาง กับระเบียบวิธีของนิวตัน และระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง เมื่อกำหนดให้ $\delta = 0.5, 0.25, 0.1$ ของ $x^2 - (1-x)^5 = 0$



ภาพที่ 5 แสดงกราฟเปรียบเทียบการลดลงของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 6 รอบการทำซ้ำแรกของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และผลต่างสืบเนื่องกลาง กับระเบียบวิธีของนิวตัน และระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง เมื่อกำหนดให้ $\delta = 0.5, 0.25, 0.1$ ของ $x^3 - e^{-x} = 0$

ภาพที่ 3-5 แสดงการเปรียบเทียบการลดลงของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 6 รอบการทำซ้ำแรกของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และผลต่างสืบเนื่องกลาง กับระเบียบวิธีของนิวตันและระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง เมื่อกำหนด $\delta = 0.5, 0.25, 0.1$ ของสมการไม่เชิงเส้น $xe^{x} - 1 = 0$, $x^{2} - (1-x)^{5} = 0$ และ $x^{3} - e^{-x} = 0$ จาก Allame and Azad (2012)

สรุปผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้แสดงการเปรียบเทียบการหาผลเฉลยของระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง และผลต่างสืบเนื่องกลาง กับระเบียบวิธีของนิวตันและระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง พบว่าเมื่อลดค่าของ δ ให้มีค่าน้อยลงคือจาก $\delta = 0.5$ เป็น $\delta = 0.25$ และ $\delta = 0.1$ ตามลำดับ จะทำให้ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงผลต่างสืบเนื่องกลาง มีจำนวนรอบของการทำซ้ำเท่ากันคือ 6 รอบ และอัตราการลู่เข้าสู่ผลเฉลยแท้จริงใกล้เคียงกับระเบียบวิธีของนิวตันโดยมีโดยมีค่า COC ใกล้เคียงกันคือ 1.87085159 และ 1.89909958 ดังตารางที่ 2 และกราฟในรูปที่ 3-4 เมื่อ $\delta = 0.1$ แสดงให้เห็นว่าการลดลงของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของทั้งสองวิธีใกล้เคียงกันมาก จากผลลัพธ์เชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งปรับปรุงใหม่โดยใช้ผลต่างสืบเนื่องกลางมีประสิทธิภาพดีกว่าระเบียบวิธีเส้นตัดโค้งเดิมอย่างเห็นได้ชัดอีกทั้งยังใช้จุดเริ่มต้นเพียงจุดเดียว

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ที่ให้ทุนสนับสนุนในการนำเสนอผลงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

Allame, M. and Azad, N. (2012). On Modified Newton Method for Solving a Nonlinear Algebraic Equations by Mid-Point. *World Applied Sciences Journal, 17*(12), 1546-1548.

Babolian, E. and Biazar, J. (2002). On the order of convergence of Adomian Method. *Applied Mathematics and Computation*, *130*, 383-387.

Ide, N. (2008). A new Hybrid iteration method for solving algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, *195*, 772-774.

Srivastava, R.B. and Srivastava, S. (2011). Comparison of Numerical Rate of Convergence of Bisection, Newton and Secant Methods. *Journal of Chemical Biological and Physical Sciences, 2*(1), 472-479.

Traub, J. F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.